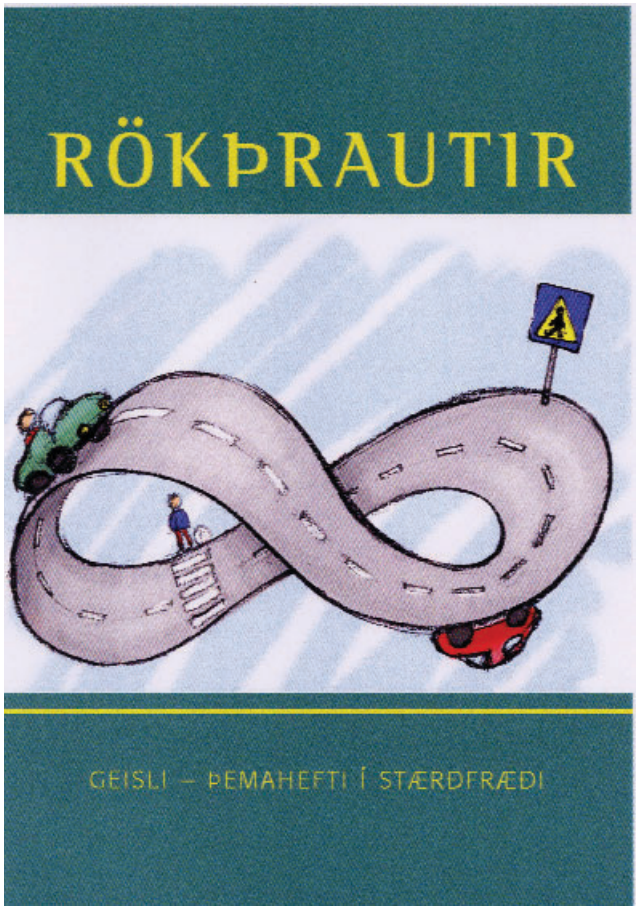
# Rökþrautir

## Kennsluleiðbeiningar




Höfundur: Jónína Vala Kristinsdóttir
1. útgáfa 2005

## Markmið

Að nemendur:

- Glími við verkefni og þrautir þar sem lausnaleiðir eru ekki augljósar fyrirfram.
- Venjist því að kynna sér verkefni til hlítar og þjálfist í að leita leiða til að leysa flókin verkefni.
- Temji sér að gera skipulega áætlun við lausnir þrauta og sannreyna niðurstöður sínar.
- Öðlist færni í að skýra lausnaleiðir sínar fyrir öðrum.
- Kynnist grundvallarhugmyndum rökfræðinnar og þjálfist í einföldum röksemdafærslum.

## Umfjöllun

Þjálfun í röksemdafærslu er undirstaða þess að ná góðum árangri í stærðfræði. Til að geta fylgt fyrirmælum og leyst flókin verkefni þarf leikni í að greina þær upplýsingar sem gefnar eru og nýta sér þær til að finna lausn. Í samfélagi sem er í örri þróun er mikilvægt að geta sett sig inn í ný og áður óþekkt viðfangsefni og vera fær um að greina upplýsingar frá ólíkum sjónarhornum. Það er líka nauðsynlegt að geta lagt mat á hvaða upplýsingar eru gagnlegar við lausn verkefna og hvort einhverjar eru villandi eða jafnvel rangar.

Í þessu þemahefti eru nokkrar þrautir sem beita þarf talsverðri umhugsun og röksemdafærslu við að leysa. Þær eru af ólíkum toga og hugsaðar til að örva nemendur til að skerpa hugsun sína og nýta þá þekkingu sem þeir hafa á stærðfræði. Sumar þrautirnar eru talsvert flóknar, en ekki er þó auðvelt að segja til um fyrirfram hverjar þeirra muni vefjast mest fyrir nemendum. Mikilvægt er að nemendur kynnist því að leggja þurfi talsverða vinnu í að leysa verkefni og treysta á eigin hugsun. Það er líka afar gagnleg reynsla að lenda í vanda sem virðist óleysanlegur. Þá þarf að staldra við og endurskoða áætlun sína. Við slíka reynslu verður til ný þekking og dýpri skilningur á viðfangsefninu sem mun nýtast síðar við lausn annarra verkefna.

Þegar fengist er við krefjandi verkefni er nauðsynlegt að geta rætt þau við aðra. Þegar nemandi útskýrir lausnaleið sína fyrir öðrum öðlast hann dýpri skilning á eigin hugsun og þá getur hann fengið nýja sýn á verkefnið. Í samræðu koma fram fleiri en eitt sjónarhorn og getur það leitt til þess að nemendur finni sameiginlega lausn á verkefni sem virðist óleysanlegt. Þegar nemandi reynir að skilja útskýringar samnemenda sinna þarf hann að setja sig inn í hugsun þeirra og bætir þannig við þekkingu sína og skilning á viðfangsefninu.

Við lausn þrauta þarf að byrja á að greina hvert vandamálið er og nýta sér svo fjölbreyttar leiðir til að finna lausn og túlka niðurstöður. Margir hafa sett fram leiðbeiningar um hvernig best sé að ganga til verks við lausnir þrauta. Þekktastur þeirra er ungverski stærðfræðingurinn George Pólya (1887–1985) sem kallaður hefur verið faðir þrautalausna. Hann flutti til Bandaríkjanna í seinni heimsstyrjöldinni og varð þekktur kennari og fræðimaður þar. Hann kenndi meðal annars kennurum hvernig hvetja mætti nemendur til að leysa þrautir og kynna þeim leiðir til að skipuleggja vinnu sína. Árið 1945 gaf hann út

bókina *How to solve it* sem varð gríðarlega vinsæl og hefur verið þýdd á mörg tungumál. Hæfileiki Pólya til að leysa þrautir kom snemma í ljós og strax í æsku var hann leikinn í að leysa vandamál. Hann átti hins vegar erfitt með að sætta sig við að læra reglur án skilnings. Hann byrjaði á að læra lögfræði í háskóla en komst fljótt að því að honum leiddist að þurfa að læra lög og reglur utanbókar. Hann reyndi þá fyrir sér á fleiri sviðum og lagði m.a. stund á líffræði, latínu og bókmenntafræði en fann að lokum sinn rétta farveg á sviði stærðfræðinnar. Á veraldarvefnum er víða að finna upplýsingar um Pólya sem áhugavert getur verið fyrir nemendur að kynna sér.

Í heftinu á blaðsíðu 11 er að finna stytta útgáfu af leiðbeiningum Pólya en hér fylgja fyllri leiðbeiningar.

## Byrjaðu á að reyna að skilja þrautina

Þetta virðist svo augljóst að það gleymist oft að nefna það. Samt sem áður er það oft meginhindrunin í vegi fyrir að nemendur geti leyst þrautir að þeir skilja ekki eftir hverju er verið að leita. Pólya ráðlagði kennurum að spyrja nemendur spurninga.

- Skilurðu öll orðin sem notuð eru til að kynna vandamálið?
- Eru nægjanlegar upplýsingar til að hægt sé að finna lausn?
- Hvað er óþekkt? Hvaða gögn koma fyrir? Hver eru skilyrðin?
- Er hægt að uppfylla öll skilyrðin? Nægja þau til að finna það sem er óþekkt?
- Er einhverjum upplýsingum ofaukið? Eru upplýsingarnar í mótsögn hver við aðra?
- Geturðu umorðað þrautina með þínum eigin orðum?
- Geturðu teiknað skýringarmynd sem hjálpar þér til að skilja vandamálið? Notaðu það táknmál sem best hentar þér.
- Flokkaðu upplýsingarnar og skrifaðu þær niður.

## Gerðu áætlun

Það eru til margar raunhæfar leiðir til að leysa þraut. Besta leiðin til að þjálfast í að velja heppilega lausnaleið er að leysa margar þrautir.

- Finndu tengslin milli upplýsinganna sem þú hefur og þess sem vantar. Þú gætir þurft að skoða svipaðar þrautir til að hjálpa þér að koma auga á tengslin. Það ætti að auðvelda þér að gera áætlun að lausn.
- Hefurðu séð þrautina áður, eða sömu þraut í ólíkum búningi?
- Leitaðu að því óþekkta. Reyndu að rifja upp þraut þar sem það sama eða svipað er óþekkt. Geturðu notað svipaða leið til að leysa þessa þraut?
- Geturðu umorðað þrautina?
- Ef þú getur ekki leyst þrautina skaltu reyna fyrst að leysa svipaða þraut sem er samt einfaldari.
- Geturðu leyst hluta þrautarinnar?
- Notaðirðu allar upplýsingarnar? Tókstu tillit til allra skilyrðanna sem voru gefin?

## Framkvæmdu áætlun þína

Flestum reynist auðveldara að framkvæma áætlunina en að skipuleggja hana. Ef áætlunin er góð er allt sem til þarf nákvæmni og þolinmæði. Ef áætlunin gengur ekki upp getur reynst nauðsynlegt að endurskoða hana.

- Þegar þú framkvæmir áætlun þína að lausn þarftu að yfirfara hvert þrep.
- Er öruggt að hvert þrep í áætlun þinni sé rétt?
- Geturðu sannað að það sé rétt?

## Farðu yfir lausn þína

Það er mikilvægt að gefa sér tíma til að ígrunda lausn sína og skoða allar tilraunir sínar að lausn. Það mun gagnast við að finna lausnaleiðir við nýjar þrautir að hafa rannsakað hvað gekk vel og hvað reyndist ekki raunhæft?

- Kannaðu hvort lausn þín er rétt.
- Geturðu reiknað á annan hátt til að kanna hvort niðurstaðan er rétt?
- Geturðu séð á augabragði hvort niðurstaða þín geti verið rétt?
- Kannaðu hvort rökin sem þú notaðir eru rétt.
- Geturðu notað niðurstöður þínar eða aðferðir til að leysa aðrar þrautir?

Heilræði Pólya eru ekki gefin nemendum í upphafi þemaheftisins. Væntanlega hafa nemendur talsverða reynslu af að leysa þrautir og hafa þróað með sér hugmyndir um hvernig best er að standa að verki. Í *Geisla 1A* var nemendum kynnt lausnaferli Pólya þó ekki hafi verið fjallað um hann líkt og hér er gert. Hér er valið, líkt og þar, að kynna ferli hans eftir að nemendur hafa fengist við að leysa þrautir og þeir beðnir að bera lausnaferli sitt saman við leiðbeiningar hans. Nemendur eru því ekki hvattir til að fylgja ákveðnu ferli, en þeim er kynnt leið sem reynst hefur öðrum gagnleg og geta þeir þá sjálfir tekið afstöðu til hvort þeir vilja nýta sér hana. Umræður um lausnaferli nemenda, og samanburður við það sem aðrir gera, eru afar gagnlegar og hjálpa nemendum til að vinna úr reynslu sinni.

Í seinni hluta heftisins er fjallað lítillega um rökfræði. Nemendur í 7. bekk hafa margir gaman af rökræðum og eru væntanlega flestir færir um að fylgja þeirri röksemdafærslu sem þar er kynnt. Það er góð þjálfun í rökhugsun að reyna að skilja röksemdafærslur sem settar eru fram í mæltu máli og gera sér grein fyrir þeim reglum sem gilda um rökfræðina. Rökfræði fjallar um reglur rökhugsunar, hvernig hægt er að greina gildar röksemdafærslur frá ógildum og hvað eru rökréttar ályktanir. Rökfræði er í raun lýsing á því hvernig fólk hugsar þegar það hugsar rökrétt.

Aristóteles er af mörgum talinn vera upphafsmaður rökfræðinnar þó bæði Sókrates og Platón hafi í raun verið forverar hans á því sviði. Formleg rökfræði Aristótelesar fjallar um tengsl setninga eða fullyrðinga. Það sem fyrir honum vakti var að gera grein fyrir því hvenær eina fullyrðingu leiði af öðrum. Sem dæmi má nefna fullyrðingarnar:

Allar mýs eru nagdýr.
Öll nagdýr eru dýr.

Af þessum tveimur fullyrðingum leiðir fullyrðinguna:

Allar mýs eru dýr.

Fyrri tvær fullyrðingarnar getum við kallað *forsendur* en þá þriðju *niðurstöðu*. Saman mynda forsendurnar og niðurstaðan rökhendu. Niðurstöðuna leiðir af forsendunum og því er rökhendan gild.

Hér eru dæmi um fleiri fullyrðingar:

Allar mýs eru húsgögn.
Öll húsgögn eru stólar.
Allar mýs eru stólar.

Í þessari rökhendu eru forsendurnar ósannar og niðurstaðan líka, en engu að síður leiðir niðurstöðuna af forsendunum.

Munurinn á þessum tveimur rökhendum er sá að í þeirri fyrri eru forsendurnar sannar og rökhendan gild. Þá segjum við að rökhendan sé rétt. Í þeirri seinni eru forsendurnar og niðurstaðan ósannar og því er rökhendan ekki rétt þó svo að hún sé gild. Það sem vakti fyrir Aristótelesi með því að setja fram formlega rökfræði var að gera almenna grein fyrir því hvenær rökhenda er gild, algerlega óháð því hvað forsendurnar og niðurstaðan segja. Rökfræði Aristótelesar er því tilraun til að gera grein fyrir gildum rökhendum en ekki endilega réttum. Hún fjallar um form en ekki innihald.

Í heftinu eru gefin dæmi um mótsagnir sem Platón benti á og þær bornar saman við fullyrðingar þar sem mótrök eru ekki gild. Aristóteles hélt því fram að mótsagnir væru ekki til í raunveruleikanum.

Allir menn eru dauðlegir.
Sókrates er maður.
Sókrates er dauðlegur.

Ef mótrökin eru sett fram, þ.e. Sókrates er ekki dauðlegur eru reglur rökfræðinnar brotnar og mótrökin eru því ekki gild.

Rökfræðin fjallar ekki um hvernig maðurinn fer að því að hugsa og ekki heldur hvort niðurstöður hugsunarinnar séu í samræmi við veruleikann. Hún fjallar einungis um það hvenær unnt sé að draga ályktanir af tilteknum forsendum þannig að þær verði jafnréttar og forsendurnar.

Gefin eru nokkur dæmi um fullyrðingar og ályktanir dregnar af þeim. Nemendur eru svo beðnir að taka afstöðu til hvort ályktanirnar séu réttar miðað við forsendurnar og einnig hvort líklegt sé að þær séu sannar. Þá er einnig fjallað um fullyrðingar. Setningin, *hann var tunglfari,* er ekki fullyrðing þar sem ekki er hægt að meta hvort hún er sönn eða ósönn. Slíkar setningar nefnast opnar yrðingar. Setningin, *Gunnar á Hlíðarenda var tunglfari,* er hins vegar fullyrðing því hægt er að meta hvort hún er sönn eða ósönn. Setningin, *Reykjavík er fallegasta borg í heimi,* er fullyrðing því hægt er að meta hvort hún sé sönn eða ósönn. Það getur hins vegar verið álitamál hvort hún er sönn eða ósönn.

Fjallað er um samtengingarnar *og* og *eða* og rætt um hvernig merking setningar getur breyst við það eitt að setja aðra þessa samtengingu í stað hinnar. Í daglegu tali er samtengingin eða notuð í merkingunni *annaðhvort eða*. Í rökfræðinni er hún hins vegar notuð í merkingunni *annaðhvort* eða *bæði*.

## Kennsluhugmyndir og lausnir verkefna

Æskilegt er að nemendur vinni saman að lausn verkefnanna í heftinu. Þau eru öll þess eðlis að þau krefjast talsverðrar yfirlegu og nemendur geta lært margt af því að ræða hugmyndir sínar við aðra. Oft reynist vel að nota kennsluferli sem ýmist hefur verið nefnt *einn – fleiri – allir* eða *hugsa – para – deila.* Þá er átt við að fyrst hugsar hver nemandi fyrir sig og ræðir síðan við einn eða nokkra bekkjarfélaga um verkefnið. Þeir hjálpast svo að við að komast að niðurstöðu. Að lokum ræðir allur nemendahópurinn (eða hluti hans) saman um niðurstöður sínar.

Hlutverk kennarans er mikilvægt við þessa vinnu. Hann þarf að fylgjast vel með vinnu nemenda og taka þátt í tilraunum þeirra við að leysa verkefnin. Ekki er nauðsynlegt fyrir kennarann að hafa leyst þrautirnar fyrirfram. Hann getur verið virkur þátttakandi með nemendum í leitinni að lausn. Þegar nemendur kynna lausnir sínar þarf kennari að hafa í huga að fá fram ólíkar lausnaleiðir og kalla eftir viðbrögðum bekkjarfélaganna við skýringum þeirra sem kynna.

Fyrsta verkefnið er nokkurs konar inngangur að heftinu. Þrautirnar á fyrstu 10 síðunum eru allar um fólkið sem býr í köstulunum þremur. Ekki er alveg ljóst á hvaða tíma börnin lifa og er það með ráðum gert að hafa sögusviðið nokkuð óljóst og óraunverulegt.

Það er ekki mjög flókið að finna leið til að leggja vegina þannig að þeir skarist ekki. Það má hins vegar gera það á ólíka vegu og getur verið álitamál hver sé besta lausnin. Það er líka mjög skemmtilegt og lærdómsríkt að glíma við að gera sjálfur þraut af þessu tagi. Hér fylgir hugmynd að verkefnalýsingu sem kennari getur gefið nemendum í tengslum við þetta fyrsta verkefni.

Það getur verið skemmtilegt að teikna kastala og virki á stórt karton og líma plastfilmu yfir. Þið getið svo leyft félögum ykkar að glíma við að teikna vegi með glærupenna. Þið getið sjálf á-kveðið fjölda kastala og hvar hliðin eru staðsett á kastala-veggnum. Þið getið líka gert sams konar þraut með öðrum viðfangsefnum. Reynið að gera flókna þraut sem er þó hægt að leysa.

Í verkefnum 2 og 3 á blaðsíðu 1 þurfa nemendur að finna reglur sem gilda um talnarunur og skrá þær. Æskilegt er að hvetja nemendur til að skrá þær bæði með orðum og á táknmáli stærðfræðinnar. Margir nemendur geta átt í erfiðleikum með að finna hvernig talnarunan heldur áfram en aðrir verða væntanlega fljótir að finna það. Fyrir þá er áhugavert að glíma við að skrá regluna bæði með orðum og á almennu formi.

## Lausnir við dæmum á bls. 1

Dæmi 2

2, 5, 10, 17, 26, **37, 50, 65, 82, 101**.
**Regla:** Hver tala í talnaröðinni 1, 2, 3, 4, 5 ... margfölduð með sjálfri sér og 1 lagður við. Eða ferningstölurnar að viðbættum einum (n · n + 1) (n er númer tölunnar í röðinni).

Dæmi 3

0,12 0,123 0,1231 0,12312 0,123123, **0,1231231 0,12312312 0,123123123 0,1231231231 0,12312312312**
**Regla:** mynstrið 123 endurtekur sig. Einn tölustafur bætist við í hverjum lið.

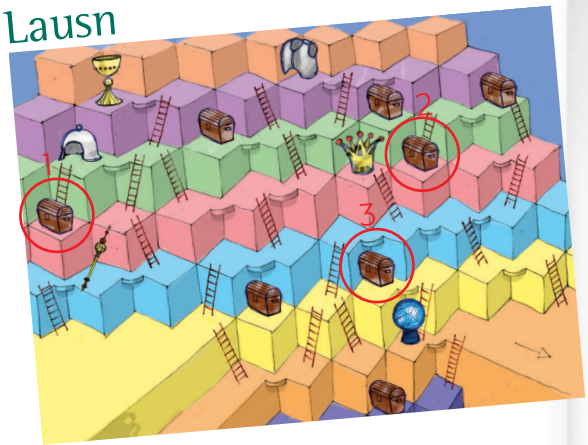
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{32}$ $\frac{1}{64}$ $\frac{1}{128}$ $\frac{1}{256}$ $\frac{1}{512}$ $\frac{1}{1024}$
**Regla:** Tvöfalda nefnarann. Eða 1 deilt með tveimur í veldinu n ($\frac{1}{2}^{n}$) (n er númer tölunnar í röðinni)

5, 4, 2, –2, –10, **–26, –58, –122, –250, –506**
**Regla:** Talan margfölduð með 2 og 6 dregnir frá (2x – 6) ( x er síðasta talan í röðinni).

Á blaðsíðum 2–3 er verkefni þar sem annars vegar þarf að semja fyrirmæli fyrir aðra til að fylgja og hins vegar að fylgja sjálfur fyrirmælum sem eru gefin. Nemendur geta sjálfir valið á hvaða formi þeir gefa fyrirmælin. Hér eru notaðar örvar sem leiðarlýsing, en það er líka hægt að gefa hana í orðum.

Ef nemendur vilja heldur fylgja lýsingu sem er gefin með orðum geta þeir farið eftir þessum lýsingum:

Lausn




Farðu upp stigann sem er beint á móti innganginum og færðu þig um eitt þrep til hægri. Farðu svo upp einn stiga og færðu þig um eitt þrep til vinstri. Farðu aftur upp einn stiga og eitt þrep til vinstri. Að lokum ferðu niður einn stiga og þá hefurðu fundið kistuna.

Farðu niður stigann sem er hægra megin við anddyrið og færðu þig svo eitt þrep til hægri. Farðu næst upp tvo stiga og færðu þig síðan þrjú þrep til hægri. Farðu því næst upp tvo stiga og eitt þrep til vinstri. Að lokum ferðu niður einn stiga og þá hefurðu fundið kistuna.

Byrjaðu á að fara upp stigann sem er vinstra megin við anddyrið. Færðu þig svo tvö þrep til hægri, farðu upp tvo stiga og niður einn. Færðu þig eitt þrep til hægri, farðu niður einn stiga og eitt þrep til vinstri. Farðu niður tvo stiga, eitt þrep til hægri og upp tvo stiga. Færðu þig tvö þrep til hægri og farðu niður einn stiga, eitt þrep til hægri og aftur niður einn stiga. Að lokum ferðu þrjú þrep til vinstri, einn stiga upp og eitt þrep til vinstri og þá hefurðu fundið kistuna.

Í verkefnum á blaðsíðu 4 er notast við leyniletur þar sem númer bókstafa í stafrófinu gefa til kynna hvað er í fjársjóðskistunum.

## Lausnir bls. 4

Dæmi 1

$3 \cdot 7 + 1 = \mathbf{22}$, $4 \cdot 7 - 2 = \mathbf{26}$, $7 - 1 = \mathbf{6}$, $3 \cdot 7 = \mathbf{21}$, $7 - 2 = \mathbf{5}$ **sverð**

Dæmi 2

i er nr. 11 Talan er **121**.

Til að finna hvaða hlutur er í kistunni þarftu að finna stafina með eftirfarandi númer:

a) númer bókstafsins **i** margfaldað með tveimur Svar: **22** merkir **s**
b) summa númera bókstafanna **e** og **f** Svar: **14** merkir **k**
c) summa númera bókstafanna **b** og **h** Svar: **13** merkir **j**
d) númer bókstafsins **i** margfaldað með þremur Svar: **33** merkir **ö**
e) númer bókstafsins **ð** margfaldað með þremur Svar: **15** merkir **l**
f) númer bókstafsins **í** deilt með þremur Svar: **4** merkir **d**
g) númer bókstafsins **í** margfaldað með tveimur Svar: **24** merkir **u**
h) númer bókstafsins **b** margfaldað með 7 Svar: **3 · = 21** merkir **r**

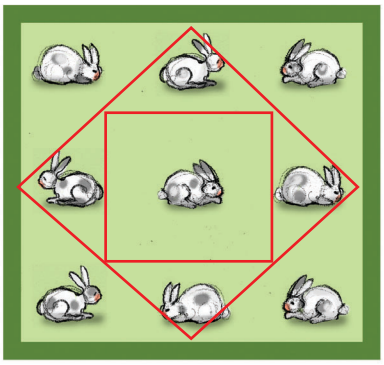
**Skjöldur**

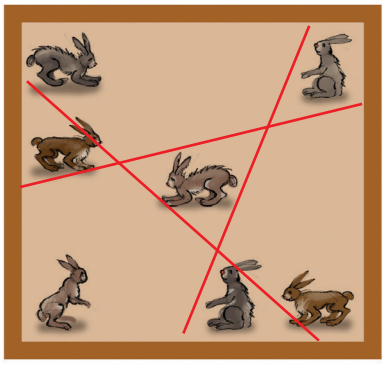
Dæmi 3

Á þriðju kistunni er lás með fimm talnaskífum. Notaðu vísbendingarnar til að hjálpa þér að finna hvaða tölur eiga að birtast í gluggunum. Talan er **32178**
Summa talnanna er 21.
Engin tala er endurtekin.
Miðtalan er lægst. Ef hún er margfölduð með sjálfri sér breytist hún ekki. **1**
Ef fremsta talan og næstsíðasta talan eru margfaldaðar saman fæst summan 21. **3 og 7**
Næstfremsta talan er fjórum sinnum lægri en sú síðasta. **2 og 8**
Tvær síðustu tölurnar standa saman í talnaröðinni. **7 og 8**
Fjögurra staf orðið er **bréf. B táknar 3, r táknar 21, é táknar 7, f táknar 8**.

## Kanínur og hérar

Við lausn fyrstu tveggja verkefnanna á blaðsíðu 5 kemur góð rúmskynjun að notum. Lausnirnar virðast ekki augljósar í fyrstu, en þegar nemendur hafa komið auga á þær eru þær í raun einfaldar.





## Vopn

Til að leysa verkefnið um vopnin er einfaldast að þreifa sig áfram með því að velja nokkrar tölur. Það er augljóst að tölurnar geta ekki verið mjög háar og því hægt að gera nokkrar tilraunir. Það er ljóst að ör hlýtur að kosta minna en fjóra gullpeninga og því liggur beinast við að prófa fyrst hvort hún kostar tvo eða þrjá peninga.
Svar:
Það þarf að borga 2 gullpeninga fyrir hníf, 3 fyrir ör og 7 fyrir sverð.
Dæmið er líka hægt að leysa með því að setja upplýsingarnar inn í jöfnur.

$36 = y + z + 9x$

$2z = y + 4x$

$y = 2z - 4x$

$36 = 2z - 4x + z + 9x$

$x = \frac{(36 - 3z)}{5}$

$z = 2$

Sem fyrr er mikilvægt fyrir kennara að hafa í huga að hvetja nemendur til að reyna á sig við lausn verkefnisins. Þeir sem eru fljótir að finna svarið ættu að glíma við að lýsa lausnarferli sínu og reyna að sýna lausnina með því að setja inn í jöfnu.

Þrautin um riddara í raunum er ein útfærsla á vinsælli rökþraut. Á íslensku er líklega einna þekktust þrautin um úlfinn, lambið og heypokann.
Hvernig flutt var yfir á
úlfur, lamb og heypokinn.
Ekkert granda öðru má,
eitt og mann tók báturinn.

## Riddarar í raunum

Fyrst reru báðir krakkarnir yfir ána. Annar reri svo til baka. Þá fór annar riddarinn yfir á bátnum og krakkinn sem var þar reri til baka. Börnin fóru svo bæði yfir ána og annað varð eftir en hitt réri til baka. Þá fór hinn riddarinn yfir ána. Barnið sem þar var reri nú til baka og sótti það sem eftir var á upphafspunktinum.
Gátuna um galdranornina er auðvelt að leysa með því að þreifa sig áfram með tölur. Það er ljóst af samhenginu að nornin er talsvert eldri en venjuleg manneskja. Sem fyrr er líka hægt að leysa verkefnin með því að setja upplýsingar inn í jöfnur.

## Galdranornin Gargongylla

Hún er 360 ára.

$G = 3S$, $F = 2G + 40$, $G + F + S = 1240$

$G + \frac{1}{3}G + 2G + 40 = 1240$

$\frac{9}{3}G = 1240$

$3G = 1240$

$G = 360$

## Að fóðra hross

30 – 6 = 24, 75 – 6 = 69. Þá eru 69 dagar eftir fram á vor. Forðinn sem eftir var er 24 daga forði fyrir 6 hesta. Nú er fjöldi hestanna þriðjungur upphaflega fjöldans og forðinn dugir því í 3 · 24 daga eða 72 daga sem er meira en 69 dagar.

Eða: 30 · 6 = 180
180 daga hestfóður.
6 · 6 = 36
Það þarf 36 daga hestfóður fyrir sex hesta í sex daga.
180 – 36 = 144 Eftir er 144 daga hestfóður.
$\frac{144}{2}$ =72 Dugir í 72 daga fyrir 2 hesta.
75 – 6 = 69 Það þarf einungis að fóðra tvo hesta í 69 daga og því dugir fóðrið sem eftir verður.

## Kappreiðar

Við getum hugsað okkur að Sörli hlaupi hringinn á einni tímaeiningu. Stjarna hleypur þá hringinn á fjórum tímaeiningum. Samtals tekur það þau þá fimm tímaeiningar að hlaupa tvo hringi. Þá þarf Blakkur að hlaupa tvo hringi á fimm tímaeiningum til að koma í mark á sama tíma og Stjarna. Hann þarf þá að hlaupa einn hring á $2\frac{1}{2}$ tímaeiningu.
Blakkur þarf að hlaupa með hraða sem er 2,5 sinnum hraði Sörla.

## Krakkarnir í kastalagarðinum

Það kann að virðast að upplýsingar vanti í þrautina og að það þyrfti að gefa aldur eins af börnunum. En upplýsingarnar um aldur Rúnars gera það að verkum að það er aðeins ein lausn á þrautinni.
Kári **16 ára**, Rúnar **15 ára**, Dóra **12 ára**, Tumi **8 ára**, Bára **6 ára** og Tóta og Snati **4 ára**.

## Kleinur

Hér er einfaldast að rekja sig til baka til að finna lausn.
Tumi tók helming af því sem eftir var á fatinu og skildi eftir 6 kleinur. Hann tók því 6 kleinur.
Bára tók þriðjunginn af því sem var eftir á fatinu og skildi eftir 12 kleinur. 12 kleinur eru $\frac{2}{3}$ hlutar. Þá er $\frac{1}{3}$ hluti 6 kleinur. Það voru því 18 kleinur eftir áður en Bára tók sinn hluta.
Kári tók fjórða hlutann af öllum kleinunum og skildi eftir 18 kleinur. $\frac{3}{4}$ hlutar eru 18 kleinur. $\frac{1}{4}$ hluti er þá 6 kleinur. Kleinurnar voru því upphaflega **24**.

Til að kanna hvort svarið er rétt er gott að reikna dæmið í tímaröð og gefa sér svarið.
$\frac{24}{4} = 6$, 24 – 6 = 18
$\frac{18}{3} = 6$, 18 – 6 = 12
$\frac{12}{2} = 6$, 12 – 6 = 6

## Vasapeningar

Það kann að virðast í upphafi að það væri skynsamlegt af pabba Rúnars að taka tilboði hans, en við nánari athugun komast nemendur að því að það var afar óskynsamlegt og hann getur væntanlega ekki staðið við samning sinn. Við lausn verkefnisins getur verið skynsamlegt að gera töflu til að hafa yfirsýn yfir útreikninga sína.

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + … 536 870 912

| dagur í mánuði | vasapeningar þann dag | heildarupphæð |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 3 (1+2) |
| 3 | 4 | 7 (3+4) |
| 4 | 8 | 15 (7+8) |
| 5 | 16 | 31 (15+16) |
| 6 | 32 | 63 |
| 7 | 64 $2^6$ | 127 $2^7-1$ |
| 30 | 536 870 912 ($2^{29}$) | 2(536 870 912) −1 $2^{30}-1$ |

Hér er upplagt að benda nemendum á að nota töflureikni við útreikninga sína og setja inn reikniformúlu. Það er verðugt verkefni fyrir þá að glíma við að finna út hvernig best er að skrá hana. Þegar formúlan er komin er auðvelt að finna hve mikla vasapeninga Rúnar hefur fengið hvaða dag mánaðarins sem er.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | =2*B1 | =B2+C1 |
| 3 | 3 | 4 | 7 |
| 4 | 4 | 8 | 15 |
| 5 | 5 | 16 | 31 |
| 6 | 6 | 32 | 63 |
| 7 | 7 | 64 | 127 |
| 8 | 8 | 128 | 255 |

## Gullpeningar Kolskeggs greifa – lausn

Verkefnið um gullpeninga Kolskeggs er einfaldast að leysa með því að rekja sig til baka. Það eru til margar útgáfur af þessu verkefni og ef til vill hafa nemendur kynnst einhverjum þeirra. Eftir að hafa leyst þetta verkefni ætti þeim að reynast auðvelt að leysa önnur svipuð.

Peningarnir sem eftir voru í lokin þegar Kolskeggur náði pokanum af þjófnum voru 900. Þriðji vörðurinn fékk helminginn af því sem eftir var þegar þjófurinn hitti hann og 200 peninga í viðbót. Þegar hann var búinn að fá helminginn hafa því verið 900 + 200 peningar eftir, eða 1100. Það hafa þá verið 2200 peningar í pokanum þegar þjófurinn hitti þriðja vörðinn.

Þegar hann hitti vörð númer tvö hafa verið (2200 + 200) · 2 gullpeningar í pokanum, eða 4800.

Þegar hann hitti fyrsta vörðinn hafa verið (4800 + 200) · 2 peningar í pokanum eða samtals **10 000 gullpeningar**.

Lausnina er hægt að sannreyna með því að gefa sér upphæðina sem þjófurinn tók og reikna hve mikið hann gaf vörðunum í hvert sinn.
Vörður 1 fékk 10 000 : 2 + 200 = 5200. Eftir verða 4800 gullpeningar.
Vörður 2 fékk 4800 : 2 + 200 = 2600. Eftir verða 2200 gullpeningar.
Vörður 3 fékk 2200 : 2 + 200 = 1300. Eftir verða 900 gullpeningar.

## Tindátar

Hér getur verið gagnlegt að setja upp í töflu og rekja sig til baka.

| Bára | Dagný | Tumi | heildarfjöldi |
|---|---|---|---|
| 48 | 48 | 48 | 144 lok |
| 24 | 24 | 96 | 144 |
| 12 | 84 | 48 | 144 |
| 78 | 42 | 24 | 144 upphaf |

## Sælgæti

Þessi þraut virðist í upphafi dálítið strembin. Hér er eins og oft áður einfaldast að þreifa sig áfram og nýta sér þær upplýsingar sem eru gefnar.

Vitað er að p · p + á · á + ó · ó < 140
Heildarverð, H < 140

$$\frac{H}{(p+á+ó)} = 7$$

7 · 20 = 140, þá eru molarnir sem Tóta keypti færri en 20
p + á + ó < 20

Ef við gefum okkur að p+á+ó=19 og nýtum okkur að við vitum að $4 \leq ó < á < p$ og á=p−3, fáum við jöfnuna p+ p−3+4=19. Þá er p=9 og á=6
Þá er auðvelt að sjá að P=9 og á=6
4 6 9 19 molar
Ef við reiknum út heildarverðið fáum við
$(9 \cdot 9) + (6 \cdot 6) + (4 \cdot 4) = 133$, sem er minna en 140.
Heildarfjöldi molanna er 19. $\frac{133}{19} = 7$. Hún borgaði því að meðaltali 7 krónur fyrir hvern mola eins og gefið var í upphafi.

Á blaðsíðu 15 eru tvær skemmtilegar þrautir þar sem reikna þarf út tíma.

## Lausnir við verkefnum á bls. 13

1. Jóhann er 12 ára miðað við forsendurnar sem eru gefnar. Þær eru sennilega réttar.
2. Miðað við forsendurnar var Gunnar á Hlíðarenda fæddur á 20. öld. Önnur forsendan er hins vegar röng því hann var ekki tunglfari.
3. Ályktunin þarf ekki að vera rétt en getur verið það. Jóhann þarf ekki að vera í 7. HK þó hann sé 12 ára.

## Lausnir við verkefnum á bls. 14

Neil Armstrong var tunglfari.
Davíð Oddsson var forsætisráðherra Íslands.
Halldór Ásgrímsson var forsætisráðherra Íslands.

Vigdís Finnbogadóttir var forseti Íslands.
Kristján Eldjárn var forseti Íslands.
Ólafur Ragnar Grímsson var forseti Íslands.

## Lausnir við verkefnum á bls. 15

Hamstur: Jóna, Bára, Már, Fríða, Rut, Bragi og Tumi.
Hundur: Geir, Stefán, Ósk, Atli, Fríða, Bragi og Tumi.
Fugl: Rut, Sigríður, Vala, Anna, Ósk, Atli, Bragi og Tumi.

Hamstur og hundur: Fríða, Bragi og Tumi.
Hamstur eða hundur: Jóna, Bára, Már, Fríða, Rut, Geir, Stefán, Ósk, Atli, Bragi og Tumi.

Hundur og fugl: Ósk, Atli, Bragi og Tumi.
Hundur eða fugl: Rut, Sigríður, Vala, Anna, Geir, Stefán, Ósk, Atli, Fríða, Bragi og Tumi.

Hamstur og fugl: Rut, Bragi og Tumi
Hamstur eða fugl: Jóna, Bára, Már, Fríða, Rut, Sigríður, Vala, Anna, Ósk, Atli, Bragi og Tumi.
Hamstur, hundur og fugl: Bragi og Tumi.
Hamstur, hundur eða fugl: Jóna, Bára, Már, Fríða, Rut, Geir, Stefán, Sigríður, Vala, Anna, Ósk, Atli, Bragi og Tumi.

Meðfylgjandi er verkefni þar sem nemendur eru hvattir til að teikna sjálfir mengjamyndir út frá gefnum forsendum.

Teiknaðu mengjamynd sem sýnir hvaða hljóðfæri krakkarnir spila á.

Hverjir spila á gítar og píanó?
Hverjir spila á gítar eða píanó?

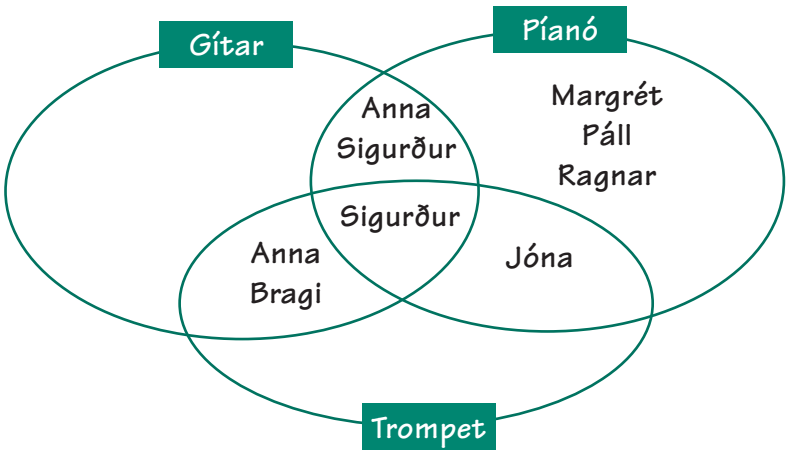
Hverjir spila á píanó og trompet?
Hverjir spila á píanó eða trompet?

Hverjir spila á gítar og trompet?
Hverjir spila á gítar eða trompet?

Hverjir spila á gítar, píanó og trompet?
Hverjir spila á gítar, píanó eða trompet?

Nokkrir krakkar í 7. HK spila á hljóðfæri.

Gítar {Anna, Bragi, Hanna, Sigurður}
Píanó {Anna, Jóna, Margrét, Páll, Ragnar, Sigurður}
Trompet {Bragi, Hanna, Jóna, Sigurður}



## Á leið í skólann

### Þraut 1

Georg bílstjóri sækir krakkana í skólann klukkan þrjú á daginn. Hann er mjög ná-kvæmur maður, ekur alltaf á jöfnum hraða og rennir alltaf í hlað við skólann á slaginu klukkan þrjú. Þá eru krakkarnir alltaf mættir á bílastæðinu og Georg leggur strax af stað. Einu sinni hættu krakkarnir fyrr í skólanum en venjulega og ákváðu að ganga af stað áleiðis heim. Þegar þau höfðu gengið nokkra stund mættu þau Georg sem ók þeim það sem eftir var leiðarinnar heim. Þau komu heim 20 mínútum fyrr en venjulega.

Hvað var klukkan þegar Georg mætti krökkunum?

### Þraut 1 – Lausn

Hvað var klukkan þegar Georg mætti krökkunum?
$\frac{20}{2} = 10$ Klukkan var 2:50.
Georg kom 20 mínútum fyrr heim en venjulega. Hann á eftir að aka það sem hann er vanur að aka á 10 mín. Hann sleppur þá við það og einnig að aka í 10 mínútur til baka að staðnum þar sem hann mætti krökkunum. Hann hefur því mætt krökkunum kl. 2:50.

### Þraut 2

Þegar Georg ekur krökkunum í skólann á morgnana fer hann fram hjá herragarði Viktors greifa. Þá er klukkan 7:05 og hann hefur ekið $\frac{1}{5}$ hluta leiðarinnar. Þegar klukkan er orðin 7:15 ekur hann fram hjá Myllubæ og hefur þá ekið $\frac{1}{3}$ hluta leiðar-innar í skólann.

Hvað er klukkan þegar Georg og krakkarnir fara að heiman og klukkan hvað eru þau komin í skólann? (Munið að Georg ekur alltaf með jöfnum hraða.)

### Þraut 2 – Lausn

$\frac{1}{3x} - \frac{1}{5x} = 10$
$5x - 3x = 150$
$2x = 150$
$x = 75$
Leiðin tekur 75 mín.
$\frac{1}{5}$ af 75 mín. eru 15 mín.
$\frac{1}{3}$ af 75 mín. eru 25 mín.
Þau leggja af stað kl. 6:50 og koma í skólann kl. 8:05.