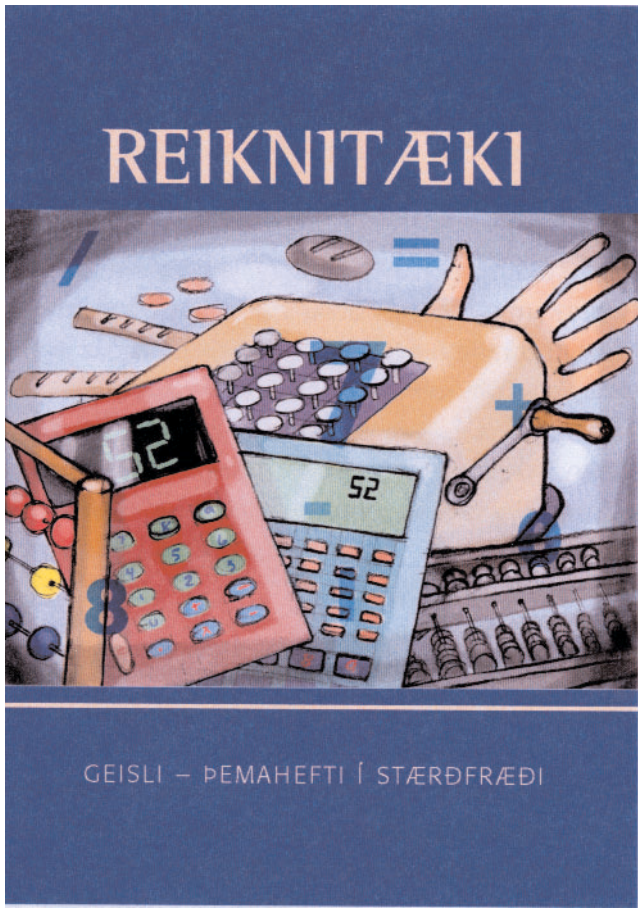
Reiknitæki

Kennsluleiðbeiningar



Höfundur: Jónína Vala Kristinsdóttir
1. útgáfa 2005

NÁMSGAGNASTOFNUN

Markmið

Að nemendur

- geri sér grein fyrir gildi þess að nota reiknitæki til að auðvelda sér útreikninga
- kynnist þeim reiknitækjum sem maðurinn hefur gert sér á ólíkum tímum
- þjálfist í að nota mismunandi reiknitæki við útreikninga
- kynnist því hvernig nota má vasareikni til að rannsaka talnasambönd og eðli reikniaðgerða
- kynnist töflureikni sem tæki til að nota við rannsóknir, úrvinnslu gagna og skráningu á niðurstöðum

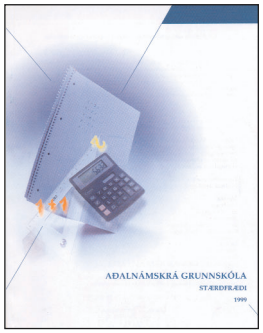
Umfjöllun og kennsluhugmyndir

Þemaheftið *Reiknitæki* fjallar um þau tæki sem maðurinn hefur komið sér upp til að auðvelda sér útreikninga. Stærðfræði er sköpunarverk mannsins. Hún er leið hans til að koma skipulagi á umhverfi sitt og um leið tæki til að hafa áhrif á það. Maðurinn hefur stöðugt verið að þróa þekkingu sína á sviðinu og færni í að beita stærðfræðinni. Til þess hefur hann frá upphafi vega búið sér til tæki til að auðvelda sér það. Í formála að bókinni *Stærðfræðin* í bókaflokki AB frá 1966 segir Björn Bjarnason:

> *Stærðfræðin er merkileg fræðigrein, líklega eitt merkasta viðfangsefni mannsandans, enda hefur hún verið nefnd drottning vísindanna. Hún er að öllu leyti sköpunarverk mannsins og hefur frá því að sögur hófust verið mikilvægur þáttur menningar og mennta. Aldrei hefur þó veldi hennar verið jafngífurlegt eins og einmitt á vorum dögum geimsiglinga, kjarnorku og rafreikna. Raunvísindi og tækni nútíðar hvíla ekki einungis á stærðfræðilegum grunni, heldur er stærðfræðin einnig tungumál þeirra og beittasta vopn.*
>
> *(Stærðfræðin. Alfræðisafn AB 1966)*

Þetta á ekki síður við í dag en á þeim tíma þegar þetta var skrifað. Í *aðalnámskrá grunnskóla, stærðfræði* er lögð áhersla á tengsl stærðfræðináms við daglegt líf og önnur svið.

> *Eitt meginhlutverk stærðfræðinnar í daglegu lífi er að lýsa, skýra og segja fyrir um fyrirbrigði náttúru og samfélags. Æskilegt er því að talsverður hluti af viðfangsefnum barna í stærðfræðinámi fjalli um raunveruleg fyrirbrigði. Það stuðlar að því að börnin tileinki sér eðlilegt jákvætt viðhorf til greinarinnar og öðlist sjálfstraust til að nota hana til að takast á við dagleg viðfangsefni og skilja umhverfi sitt. Saga stærðfræðinnar er hentugt tæki til að varpa ljósi á eðli hennar sem lifandi fræðigreinar og tengja hana öðrum námsgreinum og menningarþáttum*
>
> *(Aðalnámskrá grunnskóla, stærðfræði 1999, bls. 62).*



Mikilvægt er að nemendur geri sér grein fyrir að þau tæki sem við notum í dag til að auðvelda okkur útreikninga hafa þróast á löngum tíma og þau eru arftakar annarra einfaldari tækja sem maðurinn hefur búið til. Allt frá upphafi vega hefur hann leitað leiða til að auðvelda sér reikning. Þegar þjóðfélagið gerðist flóknara urðu þeir útreikningar sem þurfti að framkvæma stöðugt flóknari. Upphaf stærðfræðinnar má rekja til þess að menn fundu upp tölur, þ.e. orð sem þeir notuðu til þess að telja með. Til þess að hafa skipulag á talningunni hefur maðurinn sennilega byrjað á að nota fingurna sem reiknitæki. Til að varðveita upplýsingarnar fór fólk að nota einhvers konar skráningu og gerði sér þá merki í sand, leir eða annað sem hendi var næst. Síðar fundu menn upp tákn til að skrá ýmsar stærðir. Táknmálið þróaðist á mismunandi hátt á ólíkum stöðum í heiminum og einnig það talnakerfi sem fólk notaði.

Það talnakerfi sem við notum í dag, tugakerfið, er upprunnið í Indlandi og báru Arabar það með sér til Evrópu þar sem það þróaðist í þá mynd sem við þekkjum. Tugakerfið er sætiskerfi þar sem sæti hvers tölustafs í tölustafalest ræður því gildi sem hann stendur fyrir. Þessi sætisritháttur þróaðist á mörgum öldum en hann er slík völundarsmíð að hann gerir alla útreikninga mjög einfalda. Skilningur á tugakerfinu og þeim lögmálum sem það byggist á er nauðsynlegur til að geta nýtt sér þau öflugu reiknitæki sem við ráðum yfir í dag.

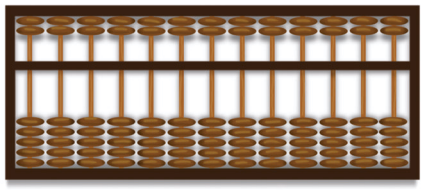
Í upphafi þemaheftisins er greint frá frumstæðum reiknitækjum. Enn í dag nýtir fólk sér að telja á fingrum og eru þeir fyrsta reiknitæki flestra barna. Í *Einingu 8* kynntust nemendur talnarithætti Maya og í *Geisla 1B* kynntust þeir rómverskum talnarithætti. Hér er talnaritháttur Forn-Egypta kynntur til sögunnar og hann borinn saman við rithátt í tugakerfi. Forn-Egyptar sóttu tákn fyrir tölur í náttúruna. Teikning af laufi papýrusplöntunnar var notuð til að tákna einn. Talan tíu var táknuð með sveigðu papýruslaufi, hundrað með hringuðu reipi, þúsund með lótusblóminu, tíu þúsund með snák og hundrað þúsund með halakörtu.



100 000 10 000 1000 100 10 1

Þó svo að táknkerfi Egypta hafi verið byggt á því að hvert tákn stæði fyrir tíu sinnum meiri fjölda en eitthvert annað tákn þá var talnakerfi þeirra ekki sætiskerfi eins og tugakerfið. Útreikningar voru því miklu óþjálli en í tugakerfinu. Til að vekja athygli á þessu eru nemendur hvattir til að bera saman rithátt og útreikninga í þessum tveimur talnakerfum. Upplýsingar um myndletur Forn-Egypta er að finna á eftirfarandi vefslóðum:
http://members.aol.com/egyptnew/tricon.html#num
http://greatscott.com/hiero/numbers.html

Talnagrindur eiga sér langa sögu. Upphaf þeirra má rekja til þess að fyrir um það bil 5000 árum tók Babýlóníumaður nokkur eftir því að hann var fljótari að reikna með því að marka í sand, sem stráð var á borð, en á fingrum sér. Af uppgötvun hans



þróaðist talnabretti með smáraufum sem steinvölum var rennt eftir. Það líkist talnagrind sem líklega er upphaflega komin frá Kína. Með smákúlum á samsíða stöngum er hægt að framkvæma flókna útreikninga. Austurlenskar talnagrindur eru öðruvísi en þær sem nemendur í grunnskólum hér á landi nota til að auðvelda sér talningu.

Á eftirfarandi vefslóðum er að finna fróðlegar upplýsingar um sögu talnagrinda og ólíkar tegundir þeirra. Þar eru einnig leiðbeiningar um talningu og útreikninga. Með leitarorðinu abacus má finna upplýsingar um talnagrindur í leitarvélum.
http://www.ee.ryerson.ca:8080/~elf/abacus/
http://www.ee.ryerson.ca:8080/~elf/abacus/intro.html

Talnagrindur voru notaðar við útreikninga í mörgum Asíulöndum allt fram til síðustu aldamóta og enn í dag má jafnvel sjá gamalt fólk sem velur að nota þær fremur en rafeindareikna. Þeir sem leiknir eru í notkun þeirra eru ótrúlega fljótir að reikna út á þeim. Það er gagnlegt að skoða hvernig reiknað var á slíkum talnagrindum og ekki ólíklegt að margir nemendur vilji reyna sig við að ná leikni í því. Á eftirfarandi vefslóð er að finna gagnvirkt forrit þar sem hægt er að skoða fimm ólíkar tegundir af talnagrindum og rannsaka hvernig þær eru notaðar til talningar og útreikninga. Velja þarf *Menu* og af listanum sem þá birtist á að velja *Demo*.
http://www.tux.org/~bagleyd/java/AbacusApp.html
Það getur líka verið gaman að búa til sína eigin talnagrind og reikna á henni. Upplagt er að leita samstarfs við kennara í hönnun og smíði um að smíða talnagrind. Einnig má gera hana á einfaldari hátt, t.d. með pípuhreinsurum og tré- eða plastperlum.



Í Evrópu voru talnagrindur algengar fram á 13. öld þegar farið var að nota annars konar reiknitæki. Menn fóru að skrá útreikninga sína á pappír því að þá var mögulegt að varðveita þá. Pappír var dýr í þá daga og því varð að nýta plássið vel. Arabíski stærðfræðingurinn *Abu Abdullah Muhammad bin Musa al-Khwarizmi* fann snemma á 10. öld upp aðferð til að skrá útreikninga á hagkvæman hátt. Þessi aðferð var kennd við hann og kölluð algóritmi (dregið af eftirnafni hans *al-Khwarizmi*). Af þeirri aðferð sem hann notaði hafa þróast mörg afbrigði sem notuð hafa verið víða um heim. Þau byggjast öll á því að talnakerfi okkar, tugakerfið, er sætiskerfi. Á íslensku er oftast talað um hefðbundin reiknirit í stað algóritma. Þetta skráningarferli, sem notað hefur verið til útreikninga í margar aldir, var líkt og talnagrindin gagnlegt tæki sem menn hafa notfært sér. Rafeindatæki nútímans hafa nú leyst hann af hólmi líkt og talnagrindina.

Þegar reiknirit líkt og það sem *al-Khwarizmi* þróaði er notað við útreikninga þarf lítið pláss á pappírnum og var það því hagkvæmt á þeim tíma sem pappír var dýr. Það flýtir líka fyrir útreikningum þar sem einungis er reiknað með tölum í einu sæti í einu og því þarf aðeins að vera fær í útreikningum með einingum þegar reiknað er. Helsti galli þess er að ef ekki er farið nákvæmlega eftir gefinni forskrift er hætta á villum í útreikningum. Ef sá sem reiknar hefur ekki forsendur til að meta hvort útreikningarnir eru réttir og niðurstöður trúlegar er tækið ekki gagnlegt. Þó að slík reiknirit byggist á eðli sætiskerfisins hjálpar einhliða þjálfun í að reikna með þeim ekki við skilning á tugakerfinu og þeim reglum sem gilda um útreikninga í því.

Fyrsta reiknivélin var fundin upp fyrir um fjórum öldum af franska stærðfræðingnum Blaise Pascal. Pascal var þekktur stærðfræðingur á sinni tíð og var aðeins 18 ára gamall þegar hann hannaði reiknivélina. Fróðlegar upplýsingar um hann er að finna á slóðinni: http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Pascal/RouseBall/RB_Pascal.html
Gagnlegar upplýsingar um reiknivélar er að finna á eftirfarandi vefslóðum: http://inventors.about.com/gi/dynamic/offsite.htm?site=http://www.vinta-gecalculators.com/

Á Netinu er hægt að finna vasareikni til að reikna á með því að slá inn leitarorðið *calculator*. Á flestum tölvum er einnig að finna vasareikni. Í stýrikerfinu Windows þarf að velja programs, assessories og svo calculator. Þá opnast gluggi með vasareikni. Gefinn er kostur á að velja einfaldan vasareikni (standard) og einnig vasareikni sem nota má til að framkvæma flókna útreikninga (scientific).

Vasareiknar eru ekki einungis gagnlegir sem hjálpartæki til að framkvæma útreikninga. Þeir eru afar góð hjálpartæki til að rannsaka eðli reikniaðgerða og innbyrðis tengsl þeirra. Hér eru nemendur hvattir til að gera rannsóknir sem ætlaðar eru til að beina sjónum þeirra að tengslum margföldunar og þess að hefja tölu í annað veldi og draga ferningsrót. Hugtakið veldi er ekki kynnt en talað um að margfalda tölu með sjálfri sér. Í námsefni 7. og 8. bekkjar kynnast nemendur nánar veldareikningum og því að draga ferningsrót. Þessi leikur er fyrst og fremst hugsaður sem rannsókn og hvatning til að prófa að nota takkana á vasareikninum. Í *Geisla 1A* kynntust nemendur hvernig nota má vasareikni til að rannsaka tengsl samlagningar og margföldunar annars vegar og frádráttar og deilingar hins vegar. Það er rifjað hér upp ásamt ýmsum fleiri rannsóknum á tölum og reikniaðgerðum.



Þá eru hér kynntir nokkrir leikir með vasareiknum. Fleiri leiki með vasareikni er að finna á *vinnuspjöldum með Geisla* og einnig í bókinni *Vasareiknar* eftir Sólrúnu Harðardóttur (Námsgagnastofnun 1990).

Síðasti kaflinn í heftinu fjallar um notkun tölvuforritsins töflureiknis. Hann er valinn hér vegna þess hve gagnlegur hann er við hvers kyns rannsóknir. Fljótlegt er að gefa skipanir í töflureikni sem kalla fram margföldunartöflur. Það auðveldar rannsóknir á þeim, samanburð á ólíkum töflum og því talnamynstri sem fram kemur. Nemendur eru einnig hvattir til að skoða fleiri reikniaðgerðir.

Töflureiknirinn nýtist vel við úrvinnslu úr hvers kyns gagnasöfnun. Hér er farin sú leið að kynna fyrir nemendum hvernig tveir nemendur nýttu töflureikninn til að vinna úr gagnasafni. Þeir eru svo hvattir til að gera sjálfir rannsókn á einhverju viðfangsefni sem þeim finnst áhugavert og nota töflureikninn til að hjálpa sér við úrvinnslu á gagnasafni sínu. Með því að færa upplýsingar í töflu er auðvelt að kalla fram niðurstöður útreikninga. Velja þarf þau gögn í töflunni sem vinna á úr og velja svo viðeigandi tákn í borðanum efst á skjánum.

Þegar ákveðið er að gera myndrit er hægt að velja um margar ólíkar gerðir. Ef nemendur hafa ekki kynnst því áður að teikna myndrit í töflureikni er nauðsynlegt fyrir þá að fá að skoða gögnin sín á mismunandi formi. Í tölfræðikaflanum í *Geisla 2* eru nemendur hvattir til að skoða hvers konar myndrit gefa hagnýtastar upplýsingar um ákveðið gagnasafn. Hér er upplagt að taka upp þráðinn um það og ræða um hvort nemendur telji að þau myndrit sem Arna og Bjarki völdu til að lýsa gagnasafni sínu gefi góða mynd af því. Hefði kannski verið heppilegra að velja annars konar myndrit? Nemendur geta kallað fram mismunandi myndrit um gagnasafn sitt og borið þau saman.

Vasareiknar þeir sem notaðir eru í dag byggjast á rafeindatækni og styðst forritun þeirra við tvíundakerfi sem er sætiskerfi þar sem sömu lögmál gilda og um tugakerfið. Það er því verðugt rannsóknarverkefni fyrir duglega nemendur að rannsaka tvíundakerfið í tengslum við umfjöllun um reiknitæki. Meðfylgjandi er verkefni um tvíundakerfið.

Heimildir

Aðalnámskrá grunnskóla – Stærðfræði. 1999. Reykjavík, Menntamálaráðuneytið.
David Bergamini. 1966. *Stærðfræðin*. *Alfræðisafn* AB. Reykjavík, Almenna bókafélagið.

Verkefni um tvíundakerfi

Talnakerfi okkar, tugakerfið, er sætiskerfi þar sem sæti tölustafs í tölu segir til um gildi hans. Talan 123 táknar því eitt hundrað, tvo tugi og þrjár einingar, en ekki einn og tvo og þrjá. Um hvert sæti sem við færum okkur til vinstri margfaldast gildi tölunnar með 10. Við notum tíu talnatákn. 0 er tíunda táknið en það táknar autt sæti. Talan 10 segir okkur að það sé einn í tugasæti og ekkert í einingasæti.

Á sama hátt er hægt að búa til önnur sætiskerfi sem hafa fleiri eða færri talnatákn. Nær allar tölvur og vasareiknar nota t.d. sætiskerfi sem kallast tvíundakerfi.

Tvíundakerfið hefur einungis tvö tákn. Við getum hugsað okkur að við notum táknin 1 og 0. 1 táknar þá fjöldann **einn** og 0 táknar **autt sæti**. Tölvur nota táknin opin straumrás fyrir fjöldann einn og lokuð straumrás fyrir autt sæti. Tölur og skipanir í tölvunni eru því samsettar úr löngum keðjum af opið, lokað. Ein skipun gæti litið þannig út: **opið, opið, lokað, lokað, lokað, opið, lokað, lokað**. Ef við skráum þetta með táknunum 1 og 0 yrði runan þannig: **11000100**.

Hvernig myndir þú skrá fjöldann •• í tvíundakerfi? En •••? En ••••? Það getur verið gott að skrá tölurnar í töflu til að auðvelda sér að sjá talnamynstrið. Skráðu töfluna í reikniheftið þitt og bættu við hana nokkrum liðum.

fjöldi	•	••	•• •	•• ••	•••• •	•••• ••	•••• •••	•••• ••••	•••• •••• •
skráð í tvíundakerfi	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001
skráð í tugakerfi	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Til að gefa til kynna að tala sé skráð í tvíundakerfi er það táknað með rómverska talnatákninu fyrir tvo: 101_{II}
Á sama hátt má gefa til kynna að tala sé skráð í tugakerfi: 101_{x}

Skráðu eftirfarandi tölur í tugakerfi:

11_{II} 100_{II} 111_{II} 1001_{II} 1101_{II} 1111_{II}

10000_{II} 10001_{II} 10011_{II} 111001_{II}

Skráðu eftirfarandi tölur í tvíundakerfi:

6_{x} 13_{x} 16_{x} 20_{x} 27_{x} 30_{x} 32_{x} 41_{x} 64_{x} 68_{x} 72_{x} 128_{x}

Skoðaðu tölurnar sem einungis eru táknaðar með 1 og auðum sætum í tvíundakerfinu og berðu saman við tölurnar sem táknaðar eru með sömu táknum í tugakerfinu.

skráning í tvíundakerfi	10_{II}	100_{II}	1000_{II}	$10\,000_{II}$	$100\,000_{II}$
fjöldi í tugakerfi	2	$2 \cdot 2 = 4$	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
skráning í tugakerfi	10_{x}	100_{x}	1000_{x}	$10\,000_{x}$	$100\,000_{x}$
fjöldi í tugakerfi	10	$10 \cdot 10 = 100$	$10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000$

Hvaða tölu í tugakerfinu táknar talan $1000\,000_{II}$? En talan $10\,000\,000_{II}$?
Gerðu sams konar töflu í reikniheftið þitt og bættu við hana nokkrum liðum.

Skoðaðu talnarununa: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 … Hver er reglan?
Skráðu talnarununa í reikniheftið þitt og bættu við hana nokkrum liðum.
Berðu þessar tölur saman við þær sem þú fékkst með tilraunum með margföldunartakkann í verkefni á blaðsíðu 9 í heftinu *Reiknitæki*.

Sennilega eru þessar tölur kunnuglegar. Þegar keyptar eru tölvur er talað um að minni þeirra hafi tiltekinn fjölda bæta. Eitt bæti er minnið sem þarf til þess að vista einn bókstaf. Þar sem tvíundakerfið er notað við tölvuforritun er heppilegt að stærð minniskubbsins sé margfeldi af 2. Tölva sem hefur 256 kílóbæta minni getur þá vistað 256 þúsund bókstafi og tölva sem hefur 256 megabæta minni getur vistað 256 milljón bókstafi.

Eftirfarandi dæmi eru skráð í tvíundakerfi. Reiknaðu þau. Mundu að þú hefur bara tvö talnatákn, 1 og 0.

11 + 1	101 + 10	1000 + 10	1011 + 111
11 – 1	101 – 10	1000 – 10	1011 – 111
10 • 10	11 • 10	110 • 10	111 • 11
100 : 10	110 : 11	1000 : 10	1000 : 100

Breyttu dæmunum í tugakerfi og reiknaðu þau í tugakerfinu. Berðu svör þín við útreikningunum saman.

