Jónína Valatýsdóttir

Kennaraháskóli Íslands
Kennsla ungra barna
Stærðfræðinám
1995

Stærðfræðikennsla byggð á skilningi barna

Eftirfarandi hafa ritað efnið og þýtt skýringardæmi úr heftinu Children's Thinking About whole Numbers

Anna Kristjánsdóttir prófessor við Kennaraháskóla Íslands
Jónína Vala Kristinsdóttir kennari við Háteigsskóla
Matthildur Guðmundsdóttir kennsluráðgjafi við Fræðslumiðstöð Reykjavikur

Kennaraháskóli Íslands
3. misseri

Kennsla ungra barna
Stærðfræðinám

Á námskeiðinu *Kennsla ungra barna* er fjallað um stærðfræðinám byrjenda í einum fyrirlestri og sjö bekkjarstundum. Farið er í leiðir til að nýta umhverfi byrjendanna, reynslu þeirra og skilning, sem best í reikningsnáminu. Rúmfræði og öðrum þáttum leyfir tíminn ekki að gefa gaum.

Kennsluhugmyndirnar grundvallast á víðtækum erlendum rannsóknum á skilningi ungra barna á tölum og reikniaðgerðum. Hugmyndakerfið nefnist á ensku *Cognitively Guided Instruction* og hefur þróast við Háskólann í Madison í Wisconsin undir stjórn Elizabeth Fennema og Thomas P. Carpenter. Í því er lögð áhersla á að auðvelda kennurum að skilja hugsun barna og benda á aðstæður til að nýta slíka þekkingu vel og markvisst í kennslunni. Einnig er sýnt að ákvarðanir um val viðfangsefna og efnistök geta grundvallast á slíkri þekkingu.

Eigi að gefa örstutta lýsingu á því hvað einkennir kennslu samkvæmt þessu hugmyndakerfi mætti t.d. nefna eftirtalið:

- Í reikningsnáminu fást börnin við lausnir þrauta. Þrautalausnir eru bæði markmið og meginleið í kennslunni.
- Þrautirnar eru valdar með hliðsjón af þeirri vitneskju sem kennarinn hefur um hugsun einstakra barna. Inntak verkefnanna er börnunum ekki framandi heldur kunnugt og þau eru fær um að kalla fram fyrri reynslu til að takast á við verkefnin.
- Kennarinn hvetur börnin til að tala um verkefnin og börnin leysa þau á mismunandi hátt og geta bæði gert grein fyrir lausninni sinni og rökstutt hana.
- Kennarinn á von á að börnin noti margvíslegar lausnarleiðir og hvetur þau til að reyna að finna nýjar leiðir, og fleiri, við þau verkefni sem um ræðir.
- Val verkefna er í samhengi við allt annað sem fengist er við í kennslunni. Reikningsþrautirnar snúast því um atriði sem er verið að ræða um í náminu eða eru vel kunn börnunum á annan hátt og eru þannig hluti af heildarstarfinu.
- Kennarinn nýtir sér þessi vinnubrögð til að flétta námsmat eðlilega saman við kennsluna ekki aðeins til þess að athuga stöðu nemenda heldur einkum til þess að byggja jafnóðum á ákvarðanir sínar um viðfangsefni.

Í tímum fyrir kennaranema er farið í meginatriði þessara hugmynda, reynd verkefni og rædd. Þar er einnig farið í það lesefni sem er að finna í þessu hefti. Eins og sjá má af ofantöldu eru þessar hugmyndir í samræmi við það sem lesið var í bókinni Primary Mathematics Today á 2. misseri kennaranámsins en hér eru gefnar mun ítarlegri leiðbeiningar um framkvæmd byrjendakennslu en unnt er að gera þar.

Tvö stutt verkefni eru unnin í tengslum við þennan þátt. Fyrra verkefnið er í seinni hluta áheyrnarviku. Þá vinna nemar saman með lítinn hóp nemenda sem þeir leggja fyrir viðfangsefni. Það tengist á einhvern hátt því sem fjallað hefur verið um í viðkomandi nemendahópi fyrri hluta vikunnar. Verkefninu er nánar lýst aftar í heftinu og einnig er nánar fjallað um það í kennslustundum.

Seinna verkefnið er skipulagning stærðfræðiþáttar í æfingakennslu. Ætlast er til að nemar nýti í verki þá þekkingu sem þeir hafa öðlast um stærðfræðinám barna og hvernig nýta má ólíka reynslu og þekkingu barnanna á stærðfræði og einnig að þeir tengi vinnuna öðru námsefni sem til umfjöllunar er eða þá daglegu lífi barnanna.

Ráðgjöf er í boði vegna þessa verkefnis og er nánar fjallað um það í tímum er nær dregur æfingakennslu. Umræða er einnig að aflokinni æfingakennslu um þetta verkefni og hvernig til tókst almennt.

Kennaraháskóli Íslands
3. misseri

Kennsla ungra barna
Stærðfræðinám

Verkefni í áheyrnarviku:

Verkefnið er unnið í seinni hluta áheyrnarviku. Nemar vinna tveir saman með 3-5 nemendur. Í fyrri hluta vikunnar þurfa nemar að fylgjast vel með þeim umræðum sem fram fara í skólanum og vera vakandi fyrir tilefnum sem gefa tækifæri til að vinna með skilning barna á stærðfræði. Mikilvægt er að gefa gaum hvar hægt er að flétta stærðfræðiviðfangsefni inn í daglegt skólastarf, t.d. í tengslum við samstund í upphafi skóladags eða þegar einhverju er safnað saman og deilt út (skólamjólk, bækur o.fl.).

Nemar útbúa sjálfir dæmi (sögur) sem tengjast því viðfangsefni sem valið er. Dæmin þurfa að vera af þeirri gerð að börnin ráði við þau en jafnframt nógu erfið til að þau reyni á börnin og gefi upplýsingar um skilning einstakra barna. Nauðsynlegt er að hafa tiltæk nokkur dæmi af ólíkri gerð og með misháum tölum til að geta brugðist við viðbrögðum barnanna. Ef fyrsta dæmið, sem lagt er fyrir, reynist nemendum mjög auðvelt er eðlilegt að velja næst þyngra dæmi, en léttara dæmi ef dæmið hefur reynst erfitt. Þá getur verið athyglivert að leggja misþung dæmi fyrir ólíka nemendur. Ekki er æskilegt að leggja fleiri en tvö til þrú dæmi fyrir börnin, en gefa sér frekar tíma til að ræða vel við þau um hvernig þau leystu dæmin.

Annar neminn segir söguna og hinn fylgist með viðbrögðum barnanna og skráir hjá sér. Börnin þurfa að hafa hjá sér eitthvað til að telja (t.d. kubba eða spilapeninga) og blað og blýant til að teikna eða skrá hjá sér á annan hátt. Þau eru hvött til að hlusta vel á söguna áður en þau byrja að vinna. Nemi endurtekur söguna ef hann sér að ekki hafa allir náð efni hennar. Báðir nemarnir fylgjast með vinnu barnanna þegar þau leysa dæmin. Þeir skipta svo um hlutverk og nú leiðir sá nemi umræður við börnin, sem áður var athugandi, en hinn fylgist með og skráir.

Neminn biður börnin að segja sér hvernig þau fengu svarið og reynir að fá fram hjá barninu hvernig það hugsaði, m.a. með því að spyrja: Geturðu sagt mér hvers vegna þú gerðir ..... ? Ef barn virðist vera að herma eftir öðru barni er mikilvægt að komast að því hvort það hefur skilið það sem það er að gera og hvernig skilningur þess á dæminu er.

Skýrslu um verkefnið (2-3 síður) þarf að skila eftir áheyrnarviku innan gefins tímafrests. Skýrslan er höfð til hliðsjónar við skipulagningu kennsluverkefnisins.

Kennaraháskóli Íslands
3. misseri

Kennsla ungra barna
Stærðfræðinám

Kennsluverkefni:

Veljið viðfangsefni sem tengjast einhverju því sem verið er að vinna með í skólanum þær tvær vikur sem æfingakennslan stendur yfir og/eða viðfangsefni úr daglegu lífi barnanna. Umfang verkefnisins miðast við u.þ.b. fjórar kennslustundir á viku en nemar verða sjálfir að skipuleggja hvernig þeir flétta það saman við annað skólastarf. Ekki er ætlast til að námsbækur í stærðfræði séu notaðar á þessu tímabili.

Mikilvægt er að vera vakandi fyrir öllum viðfangsefnum sem gefa tilefni til stærðfræðilegrar umfjöllunar. Í áheyrnarviku hafið þið kynnst skipulagi skóladagsins og daglegum störfum í skólanum. Þegar nemendur eru lesnir upp gefst tækifæri til að vinna með fjölda nemenda á mismunandi vegu. Ef unnið er með dagatal í upphafi dags gefast mörg tækifæri til útreikninga. Í tengslum við afhendingu skólamjólkur er hægt að gera margs konar athuganir. Í fatahenginu eru flíkur af ólíkum toga sem hægt er að flokka og bera saman. Leikir í frímínútum og leiktæki á skólalóð geta líka orðið uppspretta viðfangsefna. Þemaverkefni gefa öll tækifæri til stærðfræðilegra viðfangsefna. Margir velja að fjalla um börnin sjálf og er þá hægt að vinna t.d. með hárlit, augnlit, í hvaða mánuði nemendur eru fæddir o.s.frv. Í tengslum við umfjöllun um haust er hægt að vinna með ýmislegt sem hefur verið safnað, laufblöð, skordýr o.fl.

Hafið töflurnar alltaf til hliðsjónar þegar þið semjið dæmin. Veljið fyrst dæmi sem ekki krefjast flókinna aðgerða og stigþyngið þau svo, þannig að við lok kennslutímabilsins hafið þið reynt dæmi af sem flestum þeirra gerða sem fram koma í töflunum. Veljið lágar tölur í upphafi, en hækkið þær svo eftir því sem börnin ráða við. Gerið ráð fyrir að geta haft misháar tölur í sama verkefninu fyrir mismunandi einstaklinga. Hafið niðurstöður verkefnis ykkar í áheyrnarviku til hliðsjónar.

Ef tök eru á að vinna með lítinn hóp nemenda í einu er æskilegt að reyna það. Annar neminn gæti þá verið að vinna með meiri hluta bekkjarins, en hinn með 3-5 nemendur. Gott væri ef hægt er að vinna þannig að fyrstu verkefnunum, meðan börnin eru að venjast vinnunni, en síðan með hálfan eða heilan bekk eftir það.

Ef unnið er með heilan bekk nemenda í einu er mikilvægt að verkaskipting sé skýr milli kennaranema þannig að sem best heildaryfirsýn náist. Best er að annar neminn leggi verkefnið fyrir en hinn fylgist með viðbrögðum barnanna á meðan. Þegar nemendur fara að vinna fylgjast báðir nemarnir með. Æskilegra er að fylgjast náið með litlum hópi en ætla að reyna að fylgjast með öllum nemendum í stórum hópi. Þegar börnin hafa lokið við að leysa dæmið er mikilvægt að fá þau til að segja frá hvernig þau unnu. Skráið hjá ykkur upplýsingar um aðferðir barnanna til að nota við samningu næstu verkefna.

Munið að hafa alltaf tiltækt efni fyrir nemendur að telja og blað og blýant ef þeir vilja teikna eða skrá á annan hátt.

Haldið dagbók um viðbrögð barnanna og notið í skýrslu um kennsluna sem skilað er með uppgjöri á kennsluverkefni. Kennsluáætlun fyrir stærðfræðina fléttast inn í aðra kennsluáætlun fyrir tímabilið.

Kennaraháskóli Íslands

Stærðfræðikennsla grundvölluð á skilningi nemenda

1. tafla í 2. kafla: **Þrautir sem fjalla um sameiningu.**

Hvað er óþekkt?	Dæmigerðar þrautir
Niðurstaða er óþekkt.	Rúna átti 5 leikfangabíla. Á afmælinu sínu fékk hún 2 bíla í viðbót frá foreldrum sínum. Hvað á hún núna marga bíla?
Breyting er óþekkt.	Rúna átti 5 leikfangabíla. Foreldrar hennar gáfu henni nokkra bíla til viðbótar í afmælisgjöf svo nú á hún 7 bíla. Hvað fékk hún marga bíla í afmælisgjöf frá foreldrum sínum?
Upphaf er óþekkt.	Rúna á nokkra leikfangabíla. Á afmælinu sínu fékk hún 2 bíla til viðbótar frá foreldrum sínum svo nú á hún 7 bíla. Hvað átti Rúna marga bíla fyrir afmælið?

2. tafla í 2. kafla: **Þrautir sem fjalla um aðskilnað.**

Hvað er óþekkt?	Dæmigerðar þrautir
Niðurstaða er óþekkt:	Gunna átti 8 gullfiska. Hún gaf Rósu 3 fiska. Hvað átti hún þá marga fiska eftir?
Breyting er óþekkt:	Gunna átti 8 gullfiska. Hún gaf Rósu nokkra fiska og átti þá eftir 5 gullfiska. Hvað voru gullfiskarnir margir sem Gunna gaf Rósu?
Upphaf er óþekkt:	Gunna átti nokkra gullfiska. Hún gaf Rósu 3 fiska og átti þá 5 fiska eftir. Hvað átti Gunna marga gullfiska í upphafi?

3. tafla í 2. kafla: Þrautir sem fjalla um hluta-hluta-heild.

Hvað er óþekkt?	Dæmigerðar þrautir.
Heild er óþekkt:	6 strákar og 4 stelpur voru í fótbolta. Hvað voru margir krakkar í fótbolta?
Hluti er óþekktur:	Það voru 10 krakkar í fótbolta. 6 þeirra voru strákar og hitt voru stelpur. Hvað voru margar stelpur í fótboltanum?

4. tafla í 2. kafla: Þrautir sem fjalla um samanburð.

Hvað er óþekkt?	Dæmigerðar þrautir:
Mismunur er óþekktur:	Maggi á 3 litblýanta. Jórunn á 7 litblýanta. Hvað eru litblýantar Jórunnar mörgum fleiri en litblýantar Magga?
Samanburðarmengi er óþekkt:	Maggi á 3 litblýanta. Jórunn á 4 litblýöntum fleiri en Maggi. Hvað á Jórunn marga litblýanta?
Viðmið er óþekkt:	Jórunn á 7 litblýanta. Hún á 4 blýöntum fleiri en Maggi. Hve marga litblýanta á Maggi?

5. tafla í 2. kafla: Orðadæmi og tilsvarandi talnayrðingar (jöfnur).

Hvað er óþekkt?	Sameina	Aðskilja
Niðurstaða er óþekkt:	$5 + 2 = \square$	$8 - 3 = \square$
Breyting er óþekkt:	$5 + \square = 7$	$8 - \square = 5$
Upphaf er óþekkt:	$\square + 2 = 7$	$\square - 3 = 5$

6. tafla í 2. kafla: Flokkun orðadæma.

Þrautagerðir

Þrautagerðir	(Niðurstaða óþekkt)	(Breyting óþekkt)	(Upphaf óþekkt)
Sameina	Kata átti 5 glerkúlur. Jón gaf henni 8 glerkúlur í viðbót. Hvað á Kata margar kúlur samtals?	Kata á 5 glerkúlur. Hvað vantar hana margar kúlur til þess að eiga 13?	Kata átti nokkrar glerkúlur. Jón gaf henni 5 kúlur í viðbót og nú á Kata 13 kúlur. Hvað átti hún margar kúlur í upphafi.
Aðskilja	(Niðurstaða óþekkt) Kata átti 13 glerkúlur. Hún gaf Jóni 5 kúlur. Hve margar glerkúlur á Kata þá eftir	(Breyting óþekkt) Kata átti 13 glerkúlur. Hún gaf Jóni nokkrar kúlur og nú á hún 5 kúlur eftir. Hve margar glerkúlur gaf hún Jóni?	(Upphaf óþekkt) Kata átti nokkrar glerkúlur. Hún gaf Jóni 5 kúlur. Nú á hún 8 glerkúlur eftir. Hvað átti Kata margar kúlur í upphafi?
Hluti-hluti-heild	(Heild óþekkt) Kata á 5 rauðar glerkúlur og 8 bláar. Hvað á hún margar kúlur?	(Hluti óþekktur) Kata á 13 glerkúlur. 5 kúlur eru rauðar og afgangurinn er blár. Hvað á Kata margar bláar glerkúlur?	
Bera saman	(Mismunur óþekktur) Kata á 13 glerkúlur en Jón á 5 kúlur. Hvað á Kata miklu fleiri kúlur en Jón?	(Samanburðarmagn óþekkt) Jón á 5 glerkúlur. Kata á 8 glerkúlum fleiri en Jón. Hvað á Kata margar glerkúlur?	(Viðmið óþekkt) Kata á 13 glerkúlur. Hún á 5 kúlum fleiri en Jón. Hve margar kúlur á Jón?

1. tafla í 3. kafla: Notkun hlutrænna líkana.

Leitaráætlun	Lýsing á því sem gert er
Að sameina allt. Ellen var með 3 tómata. Hún náði sér í 5 tómata í viðbót. Hvað er Ellen með marga tómata núna?	Barnið notar hluti eða fingurna og býr til mengi með 3 hlutum og mengi með 5 hlutum. Mengin eru síðan sameinuð og barnið telur hlutina í sammenginu.
Að aðskilja frá. Það voru 8 selir að leika sér. 3 selir syntu burt. Hvað voru margir selir enn að leika sér?	Með því að nota hluti eða fingurna myndar barnið mengi með 8 hlutum. 3 hlutir eru fjarlægðir. Lausnin er fjöldi hlutanna sem eftir eru.
Að aðskilja niður að. Það voru 8 farþegar í strætisvagninum. Nokkrir farþegar fóru út svo nú eru farþegarnir 3. Hve margir fóru út?	Barnið telur út 8 hluti. Síðan fjarlægir það hluti úr þessu mengi þar til eftir er fjöldinn 3. Lausnin er fjöldi hlutanna sem voru fjarlægðir.
Að sameina við. Gústi átti 3 hnetur. Veiga gaf honum nokkrar fleiri svo nú á hann 8 hnetur. Hvað gaf Veiga honum margar hnetur?	Barnið býr til mengi með 3 hlutum. Síðan bætir það við hlutum þar til fjöldinn er orðinn 8. Lausnin er fundin með því að telja hlutina sem bætt var við.
Að para saman. Magga á 3 límmiða. Lárus á 8 límmiða. Hve miklu fleiri límmiða á Lárus en Magga?	Barnið býr til mengi með 3 hlutum og annað með 8 hlutum. Það parar síðan saman hluti úr þessum mengjum (einkvæm svörun) þar til annað mengið er tómt. Lausnin er fjöldi hlutanna sem eftir eru í hinu menginu.
Leitaraðferð. Dóra var með nokkrar bækur. Hún fór á bókasafnið og fékk sér 3 bækur í viðbót. Nú er hún með 8 bækur. Hvað var hún með margar bækur í upphafi.	Barnið setur nokkra hluti saman í mengi. Síðan er 3 hlutum bætt við eða 3 hlutir fjarlægðir og fjöldinn sem þá er í menginu talinn. Ef sú talning sýnir að fjöldinn er 8 þá hefur upprunalegi fjöldinn sem var í menginu verið rétta lausnin. Ef fjöldinn er ekki 8 reynir barnið að byrja með annan fjölda og endurtekur það sem gert var.

2. tafla í 3. kafla: Leiðir við talningu.

Leitaráætlun:	Lýsing á því sem gert er:
Að telja áfram frá fyrri tölu. Ellen var með 3 tómata. Húnnáði í 5 tómata í viðbót. Hvað er Ellen með marga tómata núna?	Barnið byrjar upp frá 3 og nefnir 5 tölur. Lausnin er síðasta talan sem nefnd er.
Að telja áfram frá stærri tölu. Ellen var með 3 tómata. Hún náði í 5 tómata í viðbót. Hvað er Ellen með marga tómata núna?	Barnið telur upp frá 5 og nefnir 3 tölur. Lausnin er síðasta talan sem nefnd er.
Að telja niður. Það voru 8 selir að leika sér. 3 selir syntu í burtu. Hvað voru margir selir enn að leika sér?	Barnið telur niður frá 8. Það nefnir 3 tölur. Lausnin er síðasta talan sem nefnd er.
Að telja niður að. Það voru 8 farþegar í strætisvagninum. Nokkrir farþegar fóru út. Nú eru 3 farþegar í vagninum. Hve margir farþegar fóru	Barnið telur niður frá 8 og heldur áfram þar til það nefnir töluna 3. Lausnin er fjöldi tölu-heitanna sem barnið hefur nefnt meðan á talningunni stóð.
Að telja upp að. Gústi átti 3 hnetur. Veiga gaf honum nokkrar fleiri svo nú á hann 8 hnetur. Hvað gaf Veiga honum margar hnetur?	Barnið telur áfram frá 3 þar til það nefnir töluna 8. Lausnin er fjöldi töluheitanna sem barnið nefndi í talningunni.

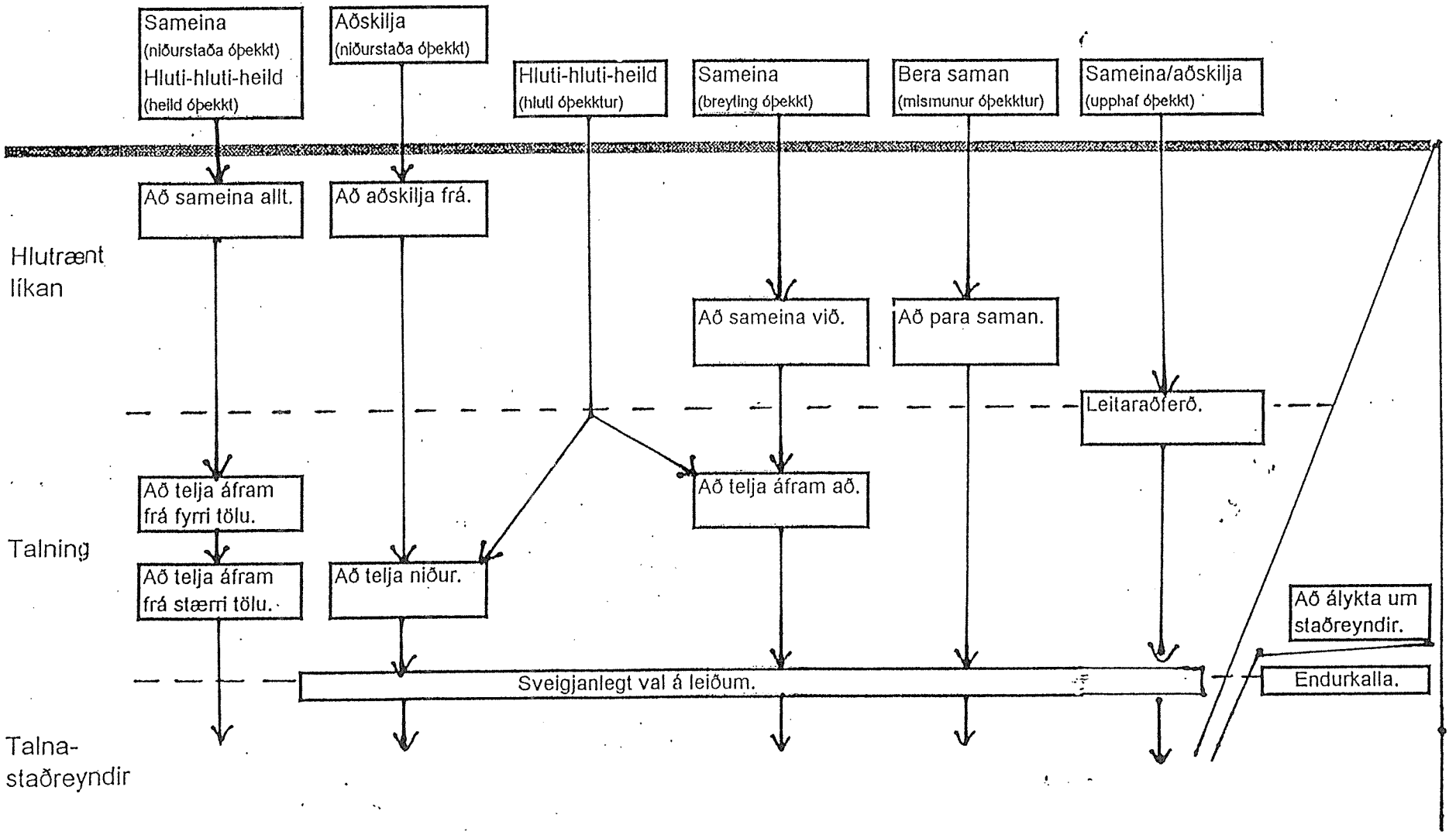
3. tafla í 3. kafla: Lausnarleiðir tengdar mismunandi gerðum þrauta.

Þraut:	Hlutrænt líkan:	Talning:
Sameina (niðurstaða óþekkt) Hluti-hluti-heild (heild óþekkt)	Að sameina allt.	Að telja áfram.
Sameina (breyting óþekkt)	Að sameina við.	Að telja áfram að.
Aðskilja (niðurstaða óþekkt)	Að aðskilja frá.	Að telja niður.
Aðskilja (breyting óþekkt)	Að aðskilja niður að.	Að telja niður að.
Bera saman (mismunur óþekktur)	Að para saman.	****
Sameina og aðskilja (upphaf óþekkt)	Leitaraðferð	Leitaraðferð
Hluti-hluti-heild (hluti óþekktur)	****	****
Bera saman (samanburðarmagn óþekkt) og (viðmið óþekkt)	****	****

**** merkir að ekki er til algeng áætlun barna við að leysa viðfangsefni af þessari gerð. Við að bera saman (samanburðarmagn óþekkt) notuðu börnin sér oftast að sameina allt eða telja áfram. Við hinar þrautirnar notuðu börnin sér að sameina við, aðskilja frá, að telja upp að eða að telja niður.

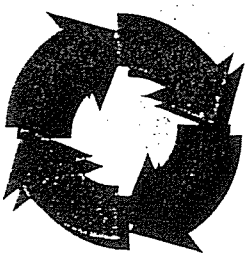
4. tafla í 3. kafla

Lausnarleiðir barna.



Stærðfræðikennsla grundvölluð á skilningi nemenda
Orðaþýðingar

algorithm	algoritmi
base ten material	sætiskerfiskubbar
change	breyting
cognition	skilningur
compare	bera saman
compensation	uppbót, jöfnun
derived fact	afleidd eða ályktuð staðreynd
difference	mismunur
direct modeling	að gera hlutrænt líkan
discourse	umræða
incremental algorithm	stigbreytingar algoritmi
invented algorithm	algoritmi sem nemandi hugsar upp
join	sameina
level of development	þroskastig
manipulative materials	námshlutir
match	stemma saman, para saman
measurement division	endurtekinn frádráttur (mælideiling)
multidigit strategy	leikáætlun eða áætlun í vinnu með tölur hærri en 9
multiplic.compar.problems	þrautir þar sem ein stærð er margfeldi af annarri
number facts	talnastaðreyndir (oft um það sem er jafnt)
numeral	tölustafur
open number sentence	opin yrðing um tölur
part	hluti
part-part-whole	hluti-hluti-heild
partitive division	skipting
problem	þraut
rate problems	þrautir sem fela í sér hlutfall
referent	viðmið
result	niðurstaða
separate	aðskilja
spoken number word	sagt eða orðað töluheiti
start	upphaf
strategy	áætlun eða leikáætlun
symmetric problems	samhverfar þrautir
trial and error	leitaraðferð
unknown factor	óþekktur þáttur
whole	heild



Donald L. Chambers

Improving Instruction by Listening to Children

In the vignette that follows, identify the ways in which the teacher's behavior is or is not consistent with the NCTM's *Standards*. The first-grade teacher presents the following problem to her students:

> "I made eight pies for my husband and he ate two of them. How many were left? Everyone get out your counters and we will do it together." She pauses briefly. "Lay down eight counters." She pauses again. "Picture them as pies. My husband eats two of them. How many pies do I have left? Write your answer beneath the line."
>
> After making sure that each child has used his or her counters to model the eight pies, removed two of the counters, counted the remainder, and written 6 in the appropriate spot, the teacher continues, "Nan has five candy hearts. Dan gave her six more. How many candy hearts does she have now?" She asks Jim to show the class how he solved the problem. Jim demonstrates his solution on the overhead projector. First he counts out five hearts, then he counts out six into another pile. Then he counts all the hearts to get eleven. The teacher points out that Jim should have started with the larger pile and added on to get the answer. She says that they should always start with the larger pile when adding on.

Some features of this vignette seem consistent with the recommendations of the NCTM's *Professional Standards for Teaching Mathematics* (1991). The children are engaged in a problem-solving activity. They are using manipulative materials to help them solve the problem. They have an opportunity to describe how they solved the problem, and the manipulative materials serve as tools for discourse.

But a closer look reveals less desirable features. The teacher seems unreceptive to a student's solution unless it conforms to principles that she has formulated. In this example, the student must start with the larger pile. Furthermore, a student's communicating to negotiate good mathematics is not valued.

In traditional mathematics teaching, communication by teachers consists largely of explanations; teachers explain and demonstrate mathematical procedures to the children. Students watch, listen, and practice. Even when teachers emphasize understanding by explaining procedures, the pattern of communication remains the same. The teacher talks and the students listen.

During the last decade, the understanding of cognition in learning mathematics has increased, and curriculum developers and teachers are being encouraged to use this knowledge. Studies indicate that the behavior of teachers changes as their understanding of children's thinking increases and that this change in behavior results in changes in patterns of classroom communication and in better mathematics learning by their students.

Indeed, this teacher did change. Consider the ways in which a subsequent episode, recorded in the same teacher's classroom one year later, reflects a changed pattern of communication.

> *Teacher:* Alice collects stamps. She had twenty-five stamps and she wants to have forty stamps. How many more does she need?

This example is a change-unknown problem, which is more complex than the simple result-unknown problem in the first episode. The numbers are also much larger. The teacher wanders

Donald Chambers is director of dissemination for the National Center for Research in Mathematical Sciences Education, University of Wisconsin—Madison, Madison, WI 53706.

This article is based on "Learning to Use Children's Mathematics Thinking: A Case Study" by Elizabeth Fennema, Thomas P. Carpenter, Megan L. Franke, and Deborah Carey. It appears in *Schools, Mathematics and the World of Reality*, edited by Robert Davis and Carolyn Maher (Needham Heights, Mass.: Allyn & Bacon, 1992). The authors have given their permission for its use.

around the room looking at individual papers. One child has written 46 rather than 40, so she prompts the student to correct the number by repeating, "She's got 25 and needs 40." She notices that Morgan is puzzled, so she suggests that he use counters. She restates the problem for Tom and says, "How are we going to find the answer?" She then calls on various children to explain how they arrived at a solution.

Tom: 20 plus 20 is 40, so I just took 5 away.

Teacher: Why did you take away 5? (Long wait time)

Tom: Because he had 25 so that would be 15.

Teacher: Judy?

Judy: I counted by nickels.

Teacher: I didn't think of it that way. Ben, would you show us on the overhead projector how you solved it?

Ben counts by ones from 25 to 40 and puts a counter on the projector for each number. He then counts the counters he placed on the projector.

Teacher: Did anyone solve it a different way?

Alice: I thought in my head; one 5 to get to 30; one 10 to get to 40; 5 and 10 is 15.

Teacher: Susan?

Susan shows how she counted from 25 to 40 with her fingers. She counts the fingers on one hand three times and says it is 15.

If the strategy that a child uses is unclear to the teacher, she responds with a comment such as, "I don't understand. Could you tell me another way?" She offers hints only when a child appears confused. After about five problems have been solved, the children separate into groups to continue their problem solving. The teacher works directly with a group of several students who appear not to understand. She gives them problems with slightly smaller numbers, and she has them think through the problems step by step. She does not tell them explicitly what to do but gives such hints as "Can you use your fingers?"

In this episode, the teacher asked children to xplain their thinking and listened to what they said. ! she did not understand, she continued to question ıem. The textbook was not evident; the teacher had ecided what to do on the basis of what she knew bout her students' thinking. She was not explicitly irecting the children's thinking. Instead, she had elected problems that were appropriate to their bilities and was encouraging them both to report nd to think about their own problem solutions. ıstead of asking children to follow procedures that ıe supplied, she was asking them to engage in roblem-solving behavior.

These instructional episodes represent teaching y the same teacher at different times. The class- ɔom looked much the same and the teacher and children were comfortable at both times, but major differences were apparent in the teacher's instructional behavior. The role of the teacher had changed. She was no longer totally directing the children's learning. Instead, she listened carefully to children and then used their thinking in making instructional decisions. The children were learning mathematics differently as they solved more challenging problems.

From the beginning of the project, this teacher strongly believed that it was her responsibility to establish an environment conducive to learning, but she no longer believed that learning would occur just because she clearly told the children what they were to learn. She described the change in her teaching in the following way:

> I listen to kids more. I am so much more aware of what the kids can really do that before I never would have thought about—first grade trying multiplication and division—that just comes from [my knowing] they can do it. . . . Then when I gave the children the opportunity and saw how they really do . . . solve those problems, now I realize that they can do them and I give them the opportunity.

She also reported that she did less direct teaching. When asked if she told the children how to solve problems, she replied in the following manner:

> I don't really share strategies. I mean, they come up with more ideas than I could ever think of.... If a child is struggling and really has no idea where to begin, I might . . . give a starting place, like "Why don't you start with three counters?" but I don't give them the strategies.

She also reported that she became more aware that children learned from each other:

> [When the kids listen to each other they] understand better than when they hear directly from me. It makes more sense to them. . . . I really see a lot of learning going on when [children] listen to the other children. I really do.

These examples reveal a classroom in which the pattern of communication changed dramatically. Initially, the communication was teacher directed. Students listened to the teacher's explanations, moving their counters according to the teacher's instructions. Students had an opportunity to explain how they got the answer to the practice problems, but their explanations were expected to conform to the explained method. Innovation was discouraged. The teacher had a very limited knowledge of each student's thinking and so had no way to use that knowledge to inform her instructional decisions.

Teachers' behaviors change as their understanding of children's thinking increases

These changes in instruction involve major shifts in the patterns of communication in the classroom

The first-grade teacher in the foregoing episodes had seven years of teaching experience at the time the study began. She is representative of many teachers who have learned to modify their practice. As a result of her access to structured knowledge about children's thinking within well-defined content domains, she was able to understand her students' thinking (Carpenter 1990). Over a period of several years she learned how to use her knowledge of children's thinking to make more informed instructional decisions.

To understand the thinking of children, teachers need to spend more time listening to children describe how they think and less time explaining to the children how the teacher thinks. Although this transition is very difficult for most teachers, they can incorporate their knowledge of children's thinking into their decision making and change their instruction as their ability to assess their students' thought processes increases. These changes in instruction involve major shifts in the patterns of communication in the classroom.

Action Research Idea 1

Record a mathematics lesson without doing any special preparation. Analyze the lesson by listening to the tape and asking such questions as the following:

1. Do I hear or see evidence that I encourage students to—
   - engage in problem solving throughout the lesson?
   - invent their own solution strategies?
   - share their strategies with other students?
   - listen to other students as they describe their strategies?
   - negotiate and validate correct mathematics?
2. Do I hear or see evidence that I—
   - listen to students as they describe their strategies?
   - make an effort to understand their strategies by asking questions to clarify their thinking?
   - avoid imposing my way of thinking as the correct way or the best way?

Reflect on patterns of classroom communication over two months. Then record and analyze another lesson. What changes do you notice in your communication? What changes do you notice in the students' communication?

Action Research Idea 2

Ask your students to solve a problem in at least two ways. As the students work on the problem, identify three students who each use a different correct strategy. Call on these three students to present their different strategies to the class.

- Which strategies seem more advanced? Why?
- Think about what each student's strategy tells about what that student knows. How does the knowledge of these three students differ?
- Think about ways to build on the knowledge of each student. What problems might be appropriate for each of them? Why?

After two months, see how these same students think about the same problem.

- Are any students using a strategy different from their earlier strategy?
- Are any students using more advanced strategies?
- How has the knowledge of these three students changed?
- Think about new ways to build on the knowledge of each student. What problems might be appropriate for each of them? Why?

References

Carpenter, Thomas P., Deborah A. Carey, and Vicky L. Kouba. "A Problem-Solving Approach to the Operations." In *Mathematics for the Young Child*, edited by Joseph N. Payne. 111–31. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1990.

National Council of Teachers of Mathematics. *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, Va.: The Council, 1991.

In NCTM Journals

Readers of *Teaching Children Mathematics* might enjoy these departments in the January–March issue of *Mathematics Teaching in the Middle School:*

- "Cartoon Corner: Real-World Fractions: A Sheepish Problem," Barbara Cain
- "Menu of Problems," David Stout
- "Now & Then: Roger Whitmore, Police Officer: Episodes in the Early History of Algebra," Sue Barnes and Karen Dee Michalowicz
- "Mathematics Investigator: Con Ed to Raise Rates by 1.1 Percent on May 1: Prisoner Vote Costs Revealed," Ron Lancaster

And in the February issue of the *Mathematics Teacher:*

- "February Calendar"
- "Media Clips," Ron Lancaster and Charlie Marion

Hvað eru þrautalausnir?

Anna Kristjánsdóttir

Lítil saga úr skólastofu

Fyrir nokkrum árum var ég stödd í skólastofu. Börnin voru 7 ára og kennarinn var reyndur byrjendakennari. Ég sat við borð hjá fjórum börnum. Kennarinn var að segja barnasögu og gerði þar hlé á frásögninni þegar kom að því að skipta þurfti 28 hlutum jafnt milli fjögurra persóna í sögunni. Það var greinilegt að sagan var börnunum hugleikin og þau lifðu sig inn í hana. Þau gerðu viðfangsefnið þegar að sínu og um stund var unnið á margvíslegan hátt við lausn þess. Ég sá surna standa upp, sækja sér kubba af mismunandi gerðum og nota þá til að búa til 2 tugi og 8 einingar. Sumir klufu svo tugina 2 og skiptu einingunum upp og fundu þannig hve mikið kom í hlut hvers. Aðra sá ég fara og ná í litlar spilaplötur, telja 28 af þeim og raða þeim upp á mismunandi vegu til þess að reyna að finna hvernig 28 gæti skipst jafnt milli fjögurra. Enn aðra sá ég búa til hugvitssamlegar teikningar sem sýndu stundum glöggan skilning á tugakerfinu og þá sérstaklega mun á tugum og einingum. Þessir nemendur fundu líka lausn á viðfangsefninu.

Við hliðina á mér sat ungur hnokki. Örstuttu eftir að vinnan hófst sagði hann eins og við sjálfan sig: 112. Ég beið og íhugaði hvað myndi gerast þegar hann uppgötvaði að hann hafði gert svolítið annað við tölurnar 28 og 4 en hyggilegt var. Eftir nokkra stund spurði kennarinn hvort einhver vildi skýra út lausnina sína og rökstyðja hana. Nokkrir nemendur komu einn eftir annan til konunnar og skýrðu lausnina sína og leiðina að henni út fyrir bekkjarfélögunum. Lausnin var sú sama hjá þeim en leiðirnar voru margar og allir höfðu bæði gagn og ánægju af að fylgjast með hvernig þau skýrðu út á mismunandi hátt. Ein táta var með lausnina 6. Á kennaranum sáust engin svipbrigði sem gáfu til kynna að lausnin væri ekki rétt. Það var heldur ekkert um það talað að aðeins ein lausn væri rétt! Telpan byrjaði útskýringarnar sínar. Í miðjum klíðum sagði hún allt í einu: "Nei, ég sé að þetta er ekki rétt hjá mér!" "Finnst þér það slæmt?" spurði kennarinn. "Nei, ég skoða þetta bara betur" sagði telpan og fyrir framan bekkjarfélagana vann hún rólega það afrek að finna ekki aðeins að um villu var að ræða heldur einnig hvar hún var og að leiðrétta hana. Það var ekki lítið afrek.

Á meðan fylgdist ég með öðru auganu með hnokkanum sem hafði tautað 112. Þegar fyrsta svar kom fram sá ég að það kom örlítill undrunarsvipur á hann en svo sagði hann eins og stundarhátt við sjálfan sig: Ó, ég marg-faldaði! Hann hafði reyndar unnið þetta allt í huganum og var greinilegt að hið sýnilega, áþreifanlega sem nemendurnir almennt notuðu við þetta verkefni var orðið hluti af hugsun hans og hann gat séð fyrir sér í huganum myndir tengdar tugakerfi allt eins og að sjá hluti eða myndir fyrir framan sig. Þyngri dæmi hefði hann hins vegar leyst með því að gera sér mynd eða raða saman hlutum á einn eða annan hátt.

Þessi kennari hafði ekki alltaf unnið svona. Í spjalli okkar á eftir sagði hún mér að aðeins væru fá ár síðan hún lærði það sem hún grundvallaði vinnu sína á. Þær hugmyndir voru reyndar afrakstur af löngum rannsóknum við háskólann Madison í Wisconsin og víðar. Hvaða kosti sá þessi reyndi kennari við nú-verandi kennsluhætti sína? Hún sá t.d. að nemendur gátu miklu meira en hún hafði á löngum ferli sínum gert sér ljóst og að þeir leystu verkefni mun betur en nemendur höfðu gert þegar kennsla hennar var frábrugðin því sem nú var. Margt mætti segja til viðbótar en e.t.v. nægir að segja að áhersla hennar hafði færst af námsefni og hugmyndum margra fullorðinna um smáskammtastefnu yfir á börn-in sjálf og að nýta forvitni þeirra, glöggskyggni, hæfileika til að glíma við ný viðfangsefni og þörf þeirra fyrir að færa rök fyrir máli sínu, sér og öðrum til sannfæringar.

Þrautalausnir

Ég hef orðið vör við ört vaxandi áhuga íslenskra kennara á þrautalausnum en það orð höfum við um langt skeið notað sem þýðingu á því sem á ensku og víðar er kallað „problem solving". Samtímis hef ég orðið vitni að umræðum og vangaveltum um það hvað hér sé á ferðinni. Sumir segja að þrautalausnir séu það sama og orðadæmi eða lesdæmi. Það er ekki rétt. Hvatinn að þrautalausn þarf ekki að vera

orðaður. Og það er fjarri því að öll orðadæmi bjóði upp á þrautalausn. Að vísu fer það nokkuð eftir aldri og þroska nemenda, eitt og sama orðadæmið getur gefið 7 ára barni tilefni til þrautalausnar en ekki 9 ára barni og margar hliðstæður mætti taka frá unglingsárunum.

Sumir tengja umræðu um þrautalausnir einkum við leiðbeiningar ungverska stærðfræðingsins G. Polya sem lagði fram skrefuð ráð fyrir þá sem væru að glíma við framandi viðfangsefni. Í tímamótabók sinni "How to solve it", sem kom út 1945, benti Polya á fjögur skref sem hyggilegt væri að feta í þegar slík glíma er á dagskrá. Þessi skref er m.a. að finna í Stærðfræði handa grunnskólum, Skuggsjá, bls. 50.

En jafnvel þótt þessi skref séu hyggileg vísbending um vinnubrögð nægja þau ekki ein og sér til að tryggja þann frjóleika og frumkvæði sem m. a. er sóst eftir að efla með því að auka hlut þrautalausna í stærðfræðináminu. Þau eru ekki viðfangsefni í kennslu heldur til viðmiðunar og stuðnings inni í eðlilegu námi.

Þrautalausnir njóta vaxandi athygli við skipulagningu stærðfræðináms í flestum nágrannalanda okkar, bæði í austri og vestri. Hið sama á reyndar við í nokkrum mæli í fleiri námsgreinum en stærðfræði. En hvers vegna er það svo? Að vissu leyti má segja að þrautalausnum hafi alltaf verið gefinn gaumur í góðri stærðfræðikennslu. Á öllum tímum hafa verið uppi kennarar sem hafa reynt að vekja vitund nemenda sinna um þau stærðfræðilegu viðfangsefni sem leyndust víða í lífi og umhverfi, hjálpað þeim að orða slík vandamál og stutt þá í að leysa þau. Á öllum tímum hafa verið uppi kennarar sem hafa glætt forvitni nemenda sinna, bent þeim á að ekki er alltaf allt sem sýnist og að unnt sé að rekja sig með ályktunum að áhugaverðum lausnum. Þessir kennarar hafa gert þetta án þess að vinna verkið fyrir nemendur eða æfa þá í merkingarlausu samhengi á einstaka þáttum úrlausnarinnar. En sagan sýnir að þessir kennarar hafa því miður verið mun færri en hinir sem lagt hafa aðrar áherslur í starfi sínu.

Sögubrot

Almannafræðsla í reikningi hér á landi er ekki nema liðlega aldargömul. Talsverð umræða var um þessa kennslu fyrstu áratugina en hún seig síðar eins og víðast hvar í far kyrrstöðu. Breytingar komu með nýstærðfræðinni sem átti upptök sín á sjötta áratugnum en barst hingað um miðbik þess sjöunda. Með bylgju nýstærðfræðinnar var hreyft við bæði inntaki og aðferðum og lögðu bæði stærðfræðingar og sálfræðingar fram rök fyrir breytingum. Fáir forsvarsmenn breytinga bjuggu hins vegar yfir þekkingu á báðum sviðum.

Þegar áhrif nýstærðfræðinnar fjöruðu út í Bandaríkjunum um og upp úr 1970 gætti mjög afturhvarfseinkenna sem bæði komu fram í því að leitað var aftur til eldri aðferða við að leysa dæmi og áhersla á stöðuga þjálfun sams konar dæma jókst. Svo hélt fram um nokkurt skeið. Rétt er að geta þess að ártalið 1970 á ekki við hér heima. Hér var af ýmsum ástæðum ekki hægt að merkja þessi sömu áhrif af neinum þunga fyrr en rúmum áratug síðar. En lítum á hvað segir um þessi mál í bókinni Studies in Mathematics Education. Vol. 8. Moving into the Twenty-first Century sem UNESCO gaf út árið 1992. Kaflann, sem vitnað er í, skrifa Bruce E. Meserve og Marilyn Suydam.

Árið 1975 byrjuðu fyrstu skýrslur að koma út sem greindu stöðu stærðfræðikennslunnar í Bandaríkjunum. Í rannsókn National Advisory Committee on Mathematical Education, sem starfaði á vegum Conference Board of the Mathematical Sciences, var reynt að leita svara við því í hvaða mæli nýstærðfræðin hefði verið framkvæmd í skólum. Í skýrslu nefndarinnar kom m.a. fram að nýstærðfræðin hefði aðeins hlotið samþykki manna að takmörkuðu leyti á barnastigi. Allt breytingaskeið nýstærðfræðinnar hafði áhersla einkum verið á reikning og þessi áhersla var óbreytt á fyrri hluta áttunda áratugarins. Á unglingastigi (svarandi til 9.–10. bekkjar og fyrstu tveggja ára framhaldsskólans) hafði námskrá hins vegar tekið breytingum en engan veginn í þeim mæli sem búist hafði verið við. Skýrslan leiddi af sér fleiri athuganir á því hver staða stærðfræðinámsins væri eftir að nýstærðfræðin var horfin að mestu og afturhvarfsstefnan ("back to basics") einkenndi skólastarf. Meðal annars voru nokkrar atviksrannsóknir sem byggðust á athugunum í skólum. Niðurstöður þóttu dapurlegar bæði varðandi kunnáttu nemenda og viðhorf.

Þessar rannsóknir voru hins vegar grundvöllur og upphaf stöðugrar uppbyggingar sem nú hefur átt sér stað í hálfan annan áratug. Í Bandaríkjunum og Kanada starfa fjölmenn stærðfræðikennarasamtök sem ná til kennara allt frá forskóla til háskóla og nefnast National Council of Teachers of Mathematics. Þessi samtök ákváðu að vinna

eftir megni að því að bæta ástand mála. NCTM lagði því við upphaf níunda áratugarins fram stefnuskrá eða verkaskrá sína "Agenda for Action" þar sem mælt var með átta tillögum varðandi námskrá, námsefni, kennslu, námsmat og almennan stuðning við stærðfræðikennslu. Fyrsti liður var þungamiðjan í tillögunum en þar var mælt með því að meginähersla skyldi lögð á "problem solving", sem við höfum valið að kalla þrautalausnir.

Áhersla á þrautalausnir var því ekki ný en hún var endurvakin um 1980 af miklum krafti í ljósi þeirra aðstæðna og áherslna sem fram komu í rannsóknum. Áherslan á þrautalausnir er nauðsynlegri nú en fyrr vegna breytileika þjóðfélagsins og vegna þeirrar tækniþróunar sem orðin er og eykst með hverju ári. Viðurkenningu á slíkum áherslum má reyndar einnig merkja hér á landi í því sem íslenski löggjafinn segir um að „búa nemendur undir líf og starf í lýðræðisþjóðfélagi sem er í sífelldri þróun".

Áherslur bandarísku stærðfræðikennarasamtakanna eru ekki einstakar. Þær eru svipaðar þeim sem unnið hefur verið eftir í fleiri löndum. En stefnumörkun þeirra var kröftugri og betur studd af fjölmörgum samtökum og stofnunum en víðast hvar gerðist annars staðar. Þess vegna m.a. hafa rit NCTM og National Research Council í Bandaríkjunum haft mjög mikil áhrif í umræðu um stærðfræðinám víða um heim. Um leið hafa þessi skrif verið í Bandaríkjunum fyrirmynd vinnu á sviði annarra námsgreina, t.d. móðurmáls.

En hvað er átt við með þrautalausnum?

Eru þrautalausnir verkefni? Ég verð vör við að margir kennarar eru að leita að "góðum þrautalausnaverkefnum". Mörg slík verkefni eru til. Og þau eru meira að segja mörg inni í námsefni sem hefur verið samið og gefið út hér heima. Sum þessara verkefna hafa kennarar nýtt sér vel í kennslustundum en önnur hafa því miður stundum hlotið þau örlög að mega notast heima án nokkurra afskipta kennara eða umræðu.

Eru þrautalausnir eitthvað annað og meira en verkefni? Geta þrautalausnir verið kennsluhættir? Lítum aftur til upphafs greinarinnar. Þar var að finna einfalt dæmi um þrautalausnir. Nemendur leystu viðfangsefni án þess að þeim væri sérstaklega kennt hvernig þeir ættu að fara að. En þeir skildu um hvað verkefnið var og héldu þræði í því sem þeir voru að gera. Þeir höfðu þau gögn sem þeim hentuðu, gert var ráð fyrir að þeir skýrðu mál sitt en létu ekki nægja að leysa verkefnið og aðstæður hvöttu nemendur til að vinna úr vanda, m.a. þeim sem skapaðist þegar úrlausn virtist ekki geta staðist.

Þessi grein er skrifuð til að rekja nokkuð aðdraganda þess að þrautalausnir hljóta svo mikla athygli og tala fyrir því að íslenskir kennarar gefi þeim góðan gaum. En jafnframt var minningin úr skólastofunni, sem rifjuð var upp í greinarbyrjun, valin til að benda á að við þróun þrautalausna í kennslu skiptir afstaða okkar kennara og vinnubrögð iðulega mun meira máli en viðfangsefnin sem við tökum fyrir.

Anna er prófessor við KHÍ og formaður Flatar.

Standards enn á ný

Eins og mörgum er kunnugt gáfu Bandarísku stærðfræðikennarasamtökin "National Council of Teachers of Mathematics" út rit árið 1989 sem heitir "Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics". Ritið hefur hlotið mjög góðar viðtökur víða um heim og mikið hefur verið um það skrifað og í vitnað. Hér á landi starfaði í fyrravetur nær 30 manna leshópur innan endurmenntunar KHÍ sem tók þetta rit til ítarlegar skoðunar. Í hópnum voru kennarar allt frá byrjendastigi yfir í framhaldsskóla. Stjórnun verksins var á hendi Önnu Kristjánsdóttur.

Við Kennaraháskóla Íslands starfar nú annar leshópur sem í eru stærðfræðikennarar við skólann auk kennara frá Háskóla Íslands. Viðfangsefni þessa hóps er annað rit NCTM sem kom út 1991 og heitir "Professional Teaching Standards in Mathematics".

Þriðja rit NCTM um slíkar viðmiðanir er nú til í drögum og nefnist "Assessment Standards for School Mathematics". Næstkomandi sumar verða þessi drög endurskoðuð í ljósi athugasemda og verður ritið síðan gefið út árið 1995.

Fyrirhugað er í litlum hópi innan Flatar að lesa saman áðurnefnd drög og hittast á tveimur til þremur fundum í mars og apríl til þess að ræða þau. Hafi einhverjir félagsmanna áhuga á að taka þátt í þessu er velkomið að hafa samband við Önnu Kristjánsdóttur eða Meyvant Þórólfsson sem fyrst.

A.K.

Morgunblaðið

Þriðjudagur 12. apríl 1994. - Aðsent efni

Kennari! - Er þetta rétt hjá mér? Önnu Kristjánsdóttur

"Hvers vegna er stærðfræði mikilvæg námsgrein? Það er meðal annars vegna þess að þegar vel er að verki staðið gefur hún nemendum tækifæri á að glíma við fjölþætt viðfangsefni og leita á mismunandi hátt leiða til að leysa þau en jafnframt að sjá sjálfir samhengi í viðfangsefnunum sínum og lausnum og að geta reynt sanngildi þeirra."

Þessi grein er skrifuð fyrir foreldra, kennara og aðra áhugamenn um nám barna og unglinga. Í henni er reynt að beina á aðgengilegan hátt athygli að atriðum sem eru mikilvæg í stærðfræðinámi nú á tímum. Fjallað er um áherslur í kennslu stærðfræði og reynt að skapa umræðugrundvöll milli kennara og foreldra um þær.

Hver kannast ekki við spurninguna hér að ofan? Annað hvort höfum við sjálf spurt og kannske oft, eða við höfum heyrt aðra spyrja. Mig langar að líta nánar á þessa sakleysislegu spurningu og hugsanleg viðbrögð kennara og foreldra við henni. Ég ætla einnig að ræða um hvaða áhrif mismunandi viðbrögð geti haft.

Þegar barn, unglingur eða jafnvel fullorðinn, spyr spurningarinnar "Er þetta rétt hjá mér?" er oft hægt að svara játandi eða neitandi. Engu að síður má greina sundur í nokkra flokka þau viðfangsefni sem að baki lágu og urðu tilefni til spurningarinnar. Í einum flokki eru t.d. spurningar þar sem spyrjandinn á ekki sjálfur möguleika á að ákveða réttmæti svarsins síns. Hann á enga leið til að segja til um það hvort úrlausnin sé trúleg eða ekki. Slíkum viðfangsefnum ætla ég ekki að gefa gaum hér þótt þau séu mikilvæg í öðru samhengi.

Þá má taka þau tilvik þar sem viðkomandi getur í raun athugað sjálfur með nánari skoðun hvort svarið stenst eða ekki, t.d. með því að fletta upp í orðabók, alfræðibók, símaskrá, landabréfabók o.s.frv. Þá er oft verið að fást við mikilvæga þekkingu og í góðu skólastarfi er bæði lögð áhersla á að nemendur geti svarað viðfangsefnum af slíkum toga og einnig að þeir temji sér vinnubrögð við að leita svara og athuga trúverðugleika þeirra. En þessu ætla ég heldur ekki að gefa mikinn gaum hér þótt mikilvægt sé.

Aftur á móti ætla ég að beina athygli að þeim atvikum þar sem nemandi spyr um réttmæti svars sem hann hefur ályktað sig fram að eða átti kost á að leysa á þann hátt. Meiri hluti þeirra viðfangsefna í stærðfræði sem fengist er við í grunnskólum og framhaldsskólum leiðir til slíkra svara. Er það rétt, spyr nemandinn, að 9+9 sé jafnt og 18? Hverju svarar hinn fullorðni? Ef hann svarar "já" staðfestir hann að vísu að rétt hafi verið reiknað en hann rænir barnið um leið helmingi viðfangsefnisins, sem sé því að sjá sjálft að niðurstaðan stenst. Hann rænir barnið um leið mikilvægum þætti í stærðfræðinámi, sem sé að temja sér að athuga sjálfur röklegt samhengi í því sem maður fæst við. Og hann gefur barninu ekki kost á að gera það sem því er fullkomlega eðlilegt að gera, að færa einföld rök fyrir máli sínu. Það getur barnið afar vel í svona tilviki. En hinum fullorðna ber að sjálfsögðu að vera svo glöggur að geta tekið öðrum röksemdum en hann lét sér sjálfur detta í hug, standist þær. 9+9 er t.d. jafnt og 18 vegna þess að 9+9 er jafnt og 10+8. Eða 9+9 er jafnt og 18 vegna þess að 9+9 er jafnt og (10+10)-(1+1). Eða 9+9 er jafnt og (5+5)+(4+4). Og þannig mætti halda áfram en rétt er að taka fram að svigar hér á undan eru til að auðvelda lestur í greininni, en ekki vegna þess að börn myndu nota þá.

Mjög mörg viðfangsefni í stærðfræði, hvar sem er í skólakerfinu, eru samkynja dæminu hér að ofan. Þau eru leyst með því að rekja sig áfram eftir röklegum þræði og þegar við skiljum þann þráð sem við

rekjum okkur eftir er okkur eðlilegt að geta farið aftur til baka og að geta prófað lausnina okkar. En það er því miður hægt að villa börnum og unglingum sýn og koma þeim til að halda að svör við reikningsdæmum séu fundin eftir einhverjum dularfullum leiðum sem menn skilja ekki, bara læra. Og þá verður barnið eða unglingurinn leiksoppur þeirra örlaga að þurfa alltaf að spyrja: Kennari! Er þetta rétt hjá mér? Og þau þurfa sífellt fleiri viðfangsefni af sama toga til þess að geta tímabundið lagt á minnið það sem í raun er ástæðulaust að leggja á minnið.

Sé forðast "að stela" viðfangsefni frá barni eða unglingi en fremur reynt að styðja einstaklinginn í úrlausn og könnun á réttmæti hennar, er eðlilegt að skoða frádrátt í samhengi við samlagningu og margföldun í samhengi við deilingu. 21-18 er jafnt og 3 vegna þess að 18+3 er jafnt og 21. 4*13 er 52 vegna þess að ef ég skipti 52 í 4 hluta fæ ég 13 í hvern. Og þannig mætti taka fjölmargt annað í stærðfræðinámi. Ef svona er unnið getum við fækkað æfingadæmum um helming vegna þess að hvert dæmi verður tvígilt. Og í raun verður það ekki aðeins tvígilt heldur bætist við skilningurinn á gildi einfaldra röksemda og hæfnin til að beita þeim. Allir kennarar þekkja dæmi um svör nemenda sem eru víðs fjarri hugsanlegum lausnum. Í slíkum tilvikum búa nemendur oft hvorki yfir kunnáttu til né skilningi á gildi þess að ljúka dæminu með því að athuga hvort lausnin geti staðist. Hvaða hugmyndir kunna þeir þá að gera sér um þau viðfangsefni sem þeir leysa fyrir sjálfa sig utan skóla? Skiptir lausnin engu máli? Kunna þeir engar leiðir til að aðgæta hvort lausnin stenst? Auðvitað skiptir hér máli hvaða viðfangsefni er um að ræða. Það er skynsamlegra og árangursríkara að kenna nemendum að vinna ef þeir gera sér ljóst um hvað verkefnin snúast.

Skóli og heimili þurfa ekki bara að kenna nemendum að reikna. Það er ekki nema hálfnaður leikur ef þau eru skilin þar eftir eða þeim gefnar misvísandi upplýsingar um það hvenær verkinu er lokið. Kenna þarf nemendum að leita lausna en líka og ekki síður að sannreyna hvort lausnin þeirra stenst. Og ekki þarf aðeins að kenna nemendum hvernig þeir geti farið að því heldur einnig að temja þeim að beita því eðlilega. En rétt er að hafa í huga að eigin rök, rök barnsins, eru nauðsynleg undirstaða slípaðs rökstuðnings.

Eru prentuð svör í námsbókum þá ekki óþörf? Í raun og veru eru þau það oft. Og það þarf að kenna að fara með slík svör. Stærðfræðinám snýst ekki í meginatriðum um að finna einstök svör. Það snýst um lausnarferlið sjálft og til þess að athuga hvort slíkt nám hafi skilað sér eru svörin ein og sér mjög fátæklegur mælikvarði. Varðandi útgefin svör ber þess hins vegar að geta að stundum fjalla námsefnishöfundar enn frekar um viðfangsefnin í svörunum til þess að leiða nemanda lengra eða sýna meiri vídd en nemandi hugsanlega sá og þar er að sjálfsögðu um annað mál að ræða.

Hvert er gildi vasareikna? Breyta þeir öllu? Nei, í raun ekki því sem hér er sagt. Vasareiknar gera okkur kleift að leysa dæmi í snarhendingu á einn veg og prófa það á annan veg allt eins og talað er um hér á undan. En þar reynir ekki síður á skilning á því hvað dæmið snýst um og til hvaða aðgerða sé hægt að grípa til að leysa það. Um vasareikna verður fjallað nánar í síðari grein og þá um leið áhrif þeirra á reikningsnám.

Enginn skyldi halda að hvert einstakt viðbragð hins fullorðna skipti máli. Þegar kvöldmaturinn sýður á eldavélinni, orkar foreldri kannske ekki að segja "hvernig sérðu það" heldur kinkar bara kolli og segir "já, það er rétt". En verði slík viðbrögð að vana og það bæði heima og í skóla, þá veitir umhverfið barninu og unglingnum mjög misvísandi skilaboð um eigið afl og getu og um leið um það hvers konar hjálpartæki stærðfræði er í daglegu lífi og víðar.

Glöggur lesandi er e.t.v. löngu farinn að velta því fyrir sér hvort ekki liggi stundum aðrar ástæður en þessar að baki því að barnið spyr hvort 9+9 séu jafnt og 18. Það er vissulega rétt. Barnið vill ekki bara vita hvort þetta er rétt, stundum spyr barnið þótt það viti að svarið er rétt. Það vill þá fá staðfestingu á að það hafi unnið vel, að það hafi staðið sig í samræmi við væntingar hins fullorðna. Barnið vill fá einhvers konar viðurkenningu á því að það hafi lagt sig fram og mætt þeim kröfum sem fram voru settar. En það er varhugavert að láta staðfestinguna á því að 9+9 séu 18 gilda sem viðbrögð við þessari beiðni barnsins. Það er hægt að bregðast við þessari eðlilegu ósk barnsins eða unglingsins um athygli, viðbrögð og jákvætt mat á annan hátt en að draga úr hæfni barna til að rökstyðja mál sitt á skýran hátt og að átta sig á mikilvægum þáttum í stærðfræðinámi.

Í skólum er stundum ljósritað mikið magn dæma. Slíkt er oft á tíðum spurnarvert, ekki aðeins vegna pappírseyðslu heldur og vegna þess að mikið magn sams konar dæma skilur margoft lítið eftir. Sé betur að gáð leynast í raun í hverju dæmi fleiri en eitt úrlausnarefni. Jafnvel smádæmi eins og 8-3 hefur ekki aðeins úrlausnina 5 heldur dregur það líka á eftir sér dæmið 5+3 sem er jafnt og 8 og staðfestir þannig að fyrra dæmið hafi verið rétt leyst. Við að leggja áherslu á þetta í öllum þáttum stærðfræðinámsins má ekki aðeins, eins og áður segir, fækka æfingadæmunum sem kennari leggur fyrir um a.m.k. helming heldur einnig styrkja nemanda mjög í námi sínu.

Hvers vegna er stærðfræði mikilvæg námsgrein? Það er meðal annars vegna þess að þegar vel er að verki staðið gefur hún nemendum tækifæri á glíma við fjölþætt viðfangsefni og leita á mismunandi hátt leiða til að leysa þau en jafnframt að sjá sjálfir samhengi í viðfangsefnunum sínum og lausnum og að geta reynt sanngildi þeirra. Að eiga þannig kost á að meta eigið verk og niðurstöður í samhengi, og sjá hvar þarf að lagfæra til þess að lausnin standist, er ekki veigalítið atriði í skólanámi. Þess vegna meðal annars er vel kennd stærðfræði mikilvæg námsgrein.

Höfundur er prófessor við Kennaraháskóla Íslands og jafnframt formaður Flatar, samtaka stærðfræðikennara.

Anna Kristjánsdóttir

Allur réttur áskilinn, © Morgunblaðið.