

Hvað eru þrautalausnir?

Anna Kristjánsdóttir

Lítil saga úr skólastofu

Fyrir nokkrum árum var ég stödd í skólastofu. Börnin voru 7 ára og kennarinn var reyndur byrjendakennari. Ég sat við borð hjá fjórum börnum. Kennarinn var að segja barnasögu og gerði þar hlé á frásögninni þegar kom að því að skipta þurfti 28 hlutum jafnt milli fjögurra persóna í sögunni. Það var greinilegt að sagan var börnunum hagleikin og þau lifðu sig inn í hana. Þau gerðu viðfangsefnið þegar að sínu og um stund var unnið á margvíslegan hátt við lausn þess. Ég sá surna standa upp, sækja sér kubba af mismunandi gerðum og nota þá til að búa til 2 tugi og 8 einingar. Sumir klufu svo tugina 2 og skiptu einingunum upp og fundu þannig hve mikið kom í hlut hvers. Aðra sá ég fara og ná í litlar spilaplötur, telja 28 af þeim og raða þeim upp á mismunandi vegu til þess að reyna að finna hvernig 28 gæti skipst jafnt milli fjögurra. Enn aðra sá ég búa til hugvitssamlegar teikningar sem sýndu stundum glöggan skilning á tugakerfinu og þá sérstaklega mun á tugum og einingum. Þessir nemendur fundu líka lausn á viðfangsefninu.

Við hliðina á mér sat ungur hnokki.

Örstuttu eftir að vinnan hófst sagði hann eins og við sjálfan sig: 112. Ég beið og íhugaði hvað myndi gerast þegar hann uppgötvaði að hann hafði gert svolítið annað við tölurnar 28 og 4 en hyggilegt var. Eftir nokkra stund spurði kennarinn hvort einhver vildi skýra út lausnina sína og rökstyðja hana. Nokkrir nemendur komu einn eftir annan til konunnar og skýrðu lausnina sína og leiðina að henni út fyrir bekkjarfélögunum. Lausnin var sú sama hjá þeim en leiðirnar voru margar og allir höfðu bæði gagn og ánægju af að fylgjast með hvernig þau skýrðu út á mismunandi hátt. Ein táta var með lausnina 6. Á kennaranum sáust engin svipbrigði sem gáfu til kynna að lausnin væri ekki rétt. Það var heldur ekkert um það talað að aðeins ein lausn væri rétt! Telpa byrjaði útskýringarnar sínar. Í miðjum klíðum sagði hún allt í einu: "Nei, ég sé að þetta er ekki rétt hjá mér!" "Finnst þér það slæmt?" spurði kennarinn. "Nei, ég skoða þetta bara betur" sagði telpa og fyrir framan bekkjarfélagana vann hún rólega það afrek að finna ekki aðeins

að um villu var að ræða heldur einnig hvar hún var og að leiðrétta hana. Það var ekki lítið afrek.

Á meðan fylgdist ég með öðru auganu með hnokkanum sem hafði tautað 112. Þegar fyrsta svar kom fram sá ég að það kom örlítill undrunarsvipur á hann en svo sagði hann eins og stundarhátt við sjálfan sig: Ó, ég margfaldaði! Hann hafði reyndar unnið þetta allt í huganum og var greinilegt að hið sýnilega, áþreifanlega sem nemendurnir almennt notuðu við þetta verkefni var orðið hluti af hugsun hans og hann gat séð fyrir sér í huganum myndir tengdar tugakerfi allt eins og að sjá hluti eða myndir fyrir framan sig. Þyngri dæmi hefði hann hins vegar leyst með því að gera sér mynd eða raða saman hlutum á einn eða annan hátt.

Þessi kennari hafði ekki alltaf unnið svona. Í spjalli okkar á eftir sagði hún mér að aðeins væru fá ár síðan hún lærði það sem hún grundvallaði vinnu sína á. Þær hugmyndir voru reyndar afrakstur af löngum rannsóknum við háskólann Madison í Wisconsin og víðar. Hvaða kosti sá þessi reyndi kennari við núverandi kennsluhætti sína? Hún sá t.d. að nemendur gátu miklu meira en hún hafði á löngum ferli sínum gert sér ljóst og að þeir leystu verkefni mun betur en nemendur höfðu gert þegar kennsla hennar var frábrugðin því sem nú var. Margt mætti segja til viðbótar en e.t.v. nægir að segja að áhersla hennar hafði færst af námsefni og hugmyndum margra fullorðinna um smáskammtastefnu yfir á börnin sjálf og að nýta forvitni þeirra, glöggskyggni, hæfileika til að glíma við ný viðfangsefni og þörf þeirra fyrir að færa rök fyrir máli sínu, sér og öðrum til sannfæringar.

Þrautalausnir

Ég hef orðið vör við ört vaxandi áhuga íslenskra kennara á þrautalausnum en það orð höfum við um langt skeið notað sem þýðingu á því sem á ensku og víðar er kallað „problem solving“. Samtímis hef ég orðið vitni að umræðum og vangaveltum um það hvað hér sé á ferðinni. Sumir segja að þrautalausnir séu það sama og orðadæmi eða lesdæmi. Það er ekki rétt. Hvatinn að þrautalausn þarf ekki að vera

orðaður. Og það er fjarri því að öll orðaðæmi bjóði upp á þrautalausn. Að vísu fer það nokkuð eftir aldri og þroska nemenda, eitt og sama orðaðæmið getur gefið 7 ára barni tilefni til þrautalausnar en ekki 9 ára barni og margar hliðstæður mætti taka frá unglingsárunum.

Sumir tengja umræðu um þrautalausnir einkum við leiðbeiningar ungverska stærðfræðingsins G. Polya sem lagði fram skrefuð ráð fyrir þá sem væru að glíma við framandi viðfangsefni. Í tímamótabók sinni "How to solve it", sem kom út 1945, benti Polya á fjögur skref sem hyggilegt væri að feta í þegar slík glíma er á dagskrá. Þessi skref er m.a. að finna í Stærðfræði handa grunnskólum, Skuggsjá, bls. 50.

En jafnvel þótt þessi skref séu hyggileg vísbending um vinnubrögð nægja þau ekki ein og sér til að tryggja þann frjóleika og frumkvæði sem m. a. er sóst eftir að efla með því að auka hlut þrautalausna í stærðfræðináminu. Þau eru ekki viðfangsefni í kennslu heldur til viðmiðunar og stuðnings inni í eðlilegu námi.

Þrautalausnir njóta vaxandi athygli við skipulagningu stærðfræðináms í flestum nágrannalanda okkar, bæði í austri og vestri. Hið sama á reyndar við í nokkrum mæli í fleiri námsgreinum en stærðfræði. En hvers vegna er það svo? Að vissu leyti má segja að þrautalausnum hafi alltaf verið gefinn gaumur í góðri stærðfræðikennslu. Á öllum tímum hafa verið uppi kennarar sem hafa reynt að vekja vitund nemenda sinna um þau stærðfræðilegu viðfangsefni sem leyndust víða í lífi og umhverfi, hjálpað þeim að orða slík vandamál og stutt þá í að leysa þau. Á öllum tímum hafa verið uppi kennarar sem hafa glætt forvitni nemenda sinna, bent þeim á að ekki er alltaf allt sem sýnist og að unnt sé að rekja sig með ályktunum að áhugaverðum lausnum. Þessir kennarar hafa gert þetta án þess að vinna verkið fyrir nemendur eða æfa þá í merkingarlausu samhengi á einstaka þáttum úrlausnarinna. En sagan sýnir að þessir kennarar hafa því miður verið mun færri en hinir sem lagt hafa aðrar áherslur í starfi sínu.

Sögubrot

Almannafræðsla í reikningi hér á landi er ekki nema liðlega aldargömul. Talsverð umræða var um þessa kennslu fyrstu áratuginna en hún seig síðar eins og víðast hvar í far kyrrstöðu. Breytingar komu með nýstærðfræðinni sem átti upptök sín á sjötta áratugnum en barst hingað um miðbik þess sjöunda. Með

bylgju nýstærðfræðinnar var hreyft við bæði inntaki og aðferðum og lögðu bæði stærðfræðingar og sálfræðingar fram rök fyrir breytingum. Fáir forsvarsmenn breytinga bjuggu hins vegar yfir þekkingu á báðum sviðum.

Þegar áhrif nýstærðfræðinnar fjöruðu út í Bandaríkjunum um og upp úr 1970 gætti mjög afturhvarfseinkenna sem bæði komu fram í því að leitað var aftur til eldri aðferða við að leysa dæmi og áhersla á stöðuga þjálfun sams konar dæma jókst. Svo hélt fram um nokkurt skeið. Rétt er að geta þess að ártalið 1970 á ekki við hér heima. Hér var af ýmsum ástæðum ekki hægt að merkja þessi sömu áhrif af neinum þunga fyrr en rúmum áratug síðar. En lítum á hvað segir um þessi mál í bókinni *Studies in Mathematics Education*. Vol. 8. *Moving into the Twenty-first Century* sem UNESCO gaf út árið 1992. Kaflann, sem vitnað er í, skrifa Bruce E. Meserve og Marilyn Suydam.

Árið 1975 byrjuðu fyrstu skýrslur að koma út sem greindu stöðu stærðfræðikennslunnar í Bandaríkjunum. Í rannsókn National Advisory Committee on Mathematical Education, sem starfaði á vegum Conference Board of the Mathematical Sciences, var reynt að leita svara við því í hvaða mæli nýstærðfræðin hefði verið framkvæmd í skólum. Í skýrslu nefndarinnar kom m.a. fram að nýstærðfræðin hefði aðeins hlotið samþykki manna að takmörkuðu leyti á barnastigi. Allt breytingaskeið nýstærðfræðinnar hafði áhersla einkum verið á reikning og þessi áhersla var óbreytt á fyrri hluta áttunda áratugarins. Á unglingastigi (svarandi til 9.-10. bekkjar og fyrstu tveggja ára framhaldsskólans) hafði námskrá hins vegar tekið breytingum en engan veginn í þeim mæli sem búist hafði verið við. Skýrslan leiddi af sér fleiri athuganir á því hver staða stærðfræðinámsins væri eftir að nýstærðfræðin var horfin að mestu og afturhvarfsstefnan ("back to basics") einkenndi skólastarf. Meðal annars voru nokkrar atviksrannsóknir sem byggðust á athugunum í skólum. Niðurstöður þóttu dapurlegar bæði varðandi kunnáttu nemenda og viðhorf.

Þessar rannsóknir voru hins vegar grundvöllur og upphaf stöðugrar uppbyggingar sem nú hefur átt sér stað í hálfan annan áratug. Í Bandaríkjunum og Kanada starfa fjölmenn stærðfræðikennarasamtök sem ná til kennara allt frá forskóla til háskóla og nefnast National Council of Teachers of Mathematics. Þessi samtök ákváðu að vinna

eftir megni að því að bæta ástand mála. NCTM lagði því við upphaf níunda áratugarins fram stefnuskrá eða verkaskrá sína "Agenda for Action" þar sem mælt var með átta tillögum varðandi námskrá, námsefni, kennslu, námsmat og almennan stuðning við stærðfræðikennslu. Fyrsti liður var þungamiðjan í tillögunum en þar var mælt með því að megináhersla skyldi lögð á "problem solving", sem við höfum valið að kalla þrautalausnir.

Áhersla á þrautalausnir var því ekki ný en hún var endurvakin um 1980 af miklum krafti í ljósi þeirra aðstæðna og áherslna sem fram komu í rannsóknum. Áherslan á þrautalausnir er nauðsynlegri nú en fyrr vegna breytileika þjóðfélagsins og vegna þeirrar tækniþróunar sem orðin er og eykst með hverju ári. Viðurkenningu á slíkum áherslum má reyndar einnig merkja hér á landi í því sem íslenski löggjafinn segir um að „búa nemendur undir líf og starf í lýðræðisþjóðfélagi sem er í sífældri þróun“.

Áherslur bandarísku stærðfræðikennara-samtakanna eru ekki einstakar. Þær eru svipaðar þeim sem unnið hefur verið eftir í fleiri löndum. En stefnumörkun þeirra var kröftugri og betur studd af fjölmörgum sam-tökum og stofnunum en víðast hvar gerðist annars staðar. Þess vegna m.a. hafa rit NCTM og National Research Council í Bandaríkjunum haft mjög mikil áhrif í umræðu um stærðfræðinám víða um heim. Um leið hafa þessi skrif verið í Bandaríkjunum fyrirmynd vinnu á sviði annarra námsgreina, t.d. móðurmáls.

En hvað er átt við með þrautalausnum?

Eru þrautalausnir verkefni? Ég verð vör við að margir kennarar eru að leita að "góðum þrautalausnaverkefnum". Mörg slík verkefni eru til. Og þau eru meira að segja mörg inni í námsefni sem hefur verið samið og gefið út hér heima. Sum þessara verkefna hafa kennarar nýtt sér vel í kennslustundum en önnur hafa því miður stundum hlotið þau örlög að mega notast heima án nokkurra afskipta kennara eða umræðu.

Eru þrautalausnir eitthvað annað og meira en verkefni? Geta þrautalausnir verið kennsluhættir? Lítum aftur til upphafs greinarinnar. Þar var að finna einfalt dæmi um þrautalausnir. Nemendur leystu viðfangsefni án þess að þeim væri sérstaklega kennt hvernig þeir ættu að fara að. En þeir skildu um hvað verkefnið var og héldu þræði í því sem þeir voru að gera. Þeir höfðu þau gögn sem þeim

hentuðu, gert var ráð fyrir að þeir skýrðu mál sitt en létu ekki nægja að leysa verkefnið og aðstæður hvöttu nemendur til að vinna úr vanda, m.a. þeim sem skapaðist þegar úrlausn virtist ekki geta staðist.

Þessi grein er skrifuð til að rekja nokkuð aðdraganda þess að þrautalausnir hljóta svo mikla athygli og tala fyrir því að íslenskir kennarar gefi þeim góðan gaum. En jafnframt var minningin úr skólastofunni, sem rifjuð var upp í greinarbyrjun, valin til að benda á að við þróun þrautalausna í kennslu skiptir afstaða okkar kennara og vinnubrögð iðulega mun meira máli en viðfangsefnið sem við tökum fyrir.

Anna er prófessor við KHÍ og formaður Flatar.

Standards enn á ný

Eins og mörgum er kunnugt gáfu Bandarísku stærðfræðikennarasamtökin "National Council of Teachers of Mathematics" út rit árið 1989 sem heitir "Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics". Ritið hefur hlotið mjög góðar viðtökur víða um heim og mikið hefur verið um það skrifað og í vitnað. Hér á landi starfaði í fyrravetur nær 30 manna leshópur innan endurmenntunar KHÍ sem tók þetta rit til ítarlegar skoðunar. Í hópnum voru kennarar allt frá byrjendastigi yfir í framhaldsskóla. Stjórnun verksins var á hendi Önnu Kristjánsdóttur.

Við Kennaraháskóla Íslands starfar nú annar leshópur sem í eru stærðfræðikennarar við skólann auk kennara frá Háskóla Íslands. Viðfangsefni þessa hóps er annað rit NCTM sem kom út 1991 og heitir "Professional Teaching Standards in Mathematics".

Þriðja rit NCTM um slíkar viðmiðanir er nú til í drögum og nefnist "Assessment Standards for School Mathematics". Næstkomandi sumar verða þessi drög endurskoðuð í ljósi athugasemda og verður ritið síðan gefið út árið 1995.

Fyrirhugað er í litlum hópi innan Flatar að lesa saman áðurnefnd drög og hlittast á tveimur til þremur fundum í mars og apríl til þess að ræða þau. Hafi einhverjir félagsmanna áhuga á að taka þátt í þessu er velkomið að hafa samband við Önnu Kristjánsdóttur eða Meyvant Þórólfsson sem fyrst.

A.K.