

Anna Kristjánsdóttir:

Góðir ráðstefnugestir. Það kemur í minn hlut að opna þessa fyrstu ráðstefnu Flatar – samtaka stærðfræðikennara og einnig að ríða á vaðið með viðbrögð við spurningunni sem við höfum lagt fram til umhugsunar.

Sem formaður Flatar gleðst ég yfir þeim fjölda kennara sem hér er staddur. Þið eruð víða að af landinu, víða að úr skólakerfinu og jafnt félagsmenn Flatar sem aðrir stærðfræðikennarar. Vonandi getum við fjallað sameiginlega um spurningu dagsins en þó einkum gert okkur ljóst hvers þurfi að spyrja til þess að geta glímt við hana af afli.

Allt frá stofnun Flatar hefur umræðan um stærðfræðinám eflst með margvíslegum umræðum en þó einkum með hjálp Flatarmála, mál gagns okkar. Við erum lánsöm að eiga þar atorkusama ritstjórn sem hefur tekist að laða að efni frá ótrúlegum fjölda stærðfræðikennara á öllum skólastigum.

Viðfangsefni ráðstefnunnar

Snúum okkur þá að spurningu dagsins: Hvaða kröfur gerir líf í lýðræðisþjóðfélagi til almennrar menntunar í stærðfræði um aldamótin 2000? Þessi spurning hefur ýmsa kosti til að bera vegna þess að hún skiptir okkur t.d. ekki í flokka til að takast á um það hver eigi að gera hvað. Öllum má ljóst vera að enginn einn getur svarað henni. Vonandi er mönnum einnig ljóst hún varðar ekki aðeins stærðfræðikennara þótt við teljum okkur að sjálfsögðu hafa talsverða sérstöðu í glímunni við hana. Vonandi berum við gæfu til að opna umræðuna þannig að fleiri raddir berist inn í hana og fleiri eignir sér hana. Þá mun stærðfræðimenntun hér á landi eflast að umfangi og gæðum.

Það er ekki ætlan mín að ráðast í að svara spurningunni beint heldur að beina sjónum að margvíslegum þáttum sem hafa þarf í huga þegar glímt er við spurningu sem þessa. Umfangsmiklar og flóknar spurningar eru ekki óáþekkar stærðfræðilegum viðfangsefnum. Við þurfum að skoða grunninn vel, hvað veldur spurningunni, hvert er vandamálið, hvaða forsendur höfum við til að svara því sem spurt er um.

Þjóðfélagsbreytingar

Veigamikil hlutverk stærðfræðikennslu er að styrkja einstaklinginn í lífi hans og starfi, einan sér og í samspili við aðra, til þess að geta betur

gegnst þjóðfélagslegum skyldum og jafnframt að geta í ríkari mæli notið þeirra möguleika sem fyrir hendi eru. Stærðfræði býður þarna bæði inntak og verkhætti, bæði innsæi og rökfestu. En eru einhverjar þær breytingar að verða á þjóðfélögum að ástæða sé til að staldra við og íhuga stærðfræðikennsluna? Hvað er það sem er að breytast?

Hefðbundin störf eru að hverfa. Búið er að vélvæða og tölvuvæða mikinn fjölda starfa sem hendur og hugur unnu áður. Og það er samdóma álit manna að nýsköpun á starfsvettvangi kalli á störf sem krefjast menntunar, m.a. góðs skilnings á stærðfræði. Samskipti þjóða aukast. Samþekking þjóða eykst einnig. Við erum sífellt í meira návígi við aðrar þjóðir.

Tæknivæðing eykst hvarvetna í atvinnugreinum og margvísleg tæknivæðing heimilanna er löngu orðin veruleiki. En tæknimöguleikar eru ekki nýttir eins og unnt væri. Prófessor Magnús Magnússon greindi á afmælisýningu Skýrslutæknifélags Íslands í september sl. frá nokkrum þeirra viðfangsefna sem fyrsta tölva HÍ glímdi við á sjöunda áratugnum, svo sem útreikninga vegna lagningar Keflavíkurvegjar, orðgreiningar á Hreiðri Ólafs Jóhanns, úrvinnslu krabbameinsrannsókna og fjölmargt fleira. Og við vitum að þessi tölva bjó aðeins yfir broti af því afli sem tölvur í barna-herbergjum hafa nú. Þetta gátu menn vegna þess að þeir kunnu til verka. Í dag eru inni á heimilum tækifæri til þess að skoða ýmsa hluti stærðfræðilega, átta sig betur á því hvað þjóðfélagið býður upp á, taka gagnrýnni, vitrænni afstöðu til mála, sem krafist er af fólki í lýðræðisþjóðfélag. En þetta er vannýtt vegna þess að fólk kann ekki að nota tölvutæknina til þessara hluta. Og til þess er ekki nóg að kunna bara meira í stærðfræði í eldri skilningi. Tæknin býður upp á möguleika á að nálgast úrlausnir á allt annan hátt en fyrr, að leysa fleiri stærðfræðileg viðfangsefni en áður varð komist yfir, flóknari viðfangsefni en unnt var að ráðast í og að leita fleiri lausna, leggja meiri áherslu á að sjá samhengi og nýta mun meira magn gagna til þess að fá betri yfirsýn. Og hér er aðeins fátt eitt nefnt.

Sífellt fleiri fræðigreinar nýta sér hugtök og vinnubrögð stærðfræði. Stærðfræðileg úrvinnsla er sýnilegri í fjölmiðlum en hún var sem samanburður minn á Morgunblaðinu frá 1933, 1963 og 1993 hefur leitt skýrt í ljós. Hins

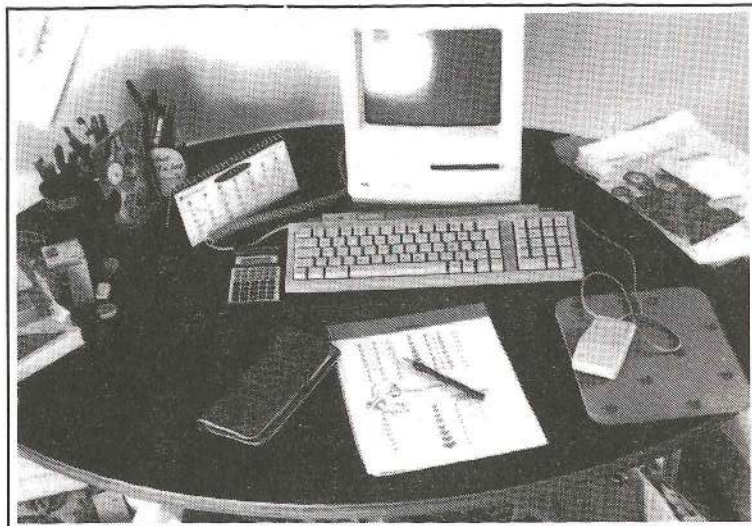
vegar eru viðbrögð almennings við því, sem sett er fram á stærðfræðilegan hátt í fjölmiðlum, nær engin. Fólk á í ritdeilum vegna leik-sýninga og ljóðagerðar en þess eru nær engin merki að menn velti fyrir sér eða gagnrýni þær tölulegu upplýsingar sem hellast yfir almenning. Þar er umræðan engin. Hvað veldur?

En jafnframt því að stærðfræðileg úrvinnsla er að verða sýnilegri í fjölmiðlum eru ýmsir þættir stærðfræðilegrar úrvinnslu síður sýnilegir en áður var. Í mjög umfangsmikilli rannsókn minni vorið 1992 meðal u.þ.b. 3000 nemenda á aldrinum 11 – 14 ára var m.a. spurt eftirfarandi spurningar: „Hvernig finnst þér algengast að þeir, sem eru eldri en þú heima hjá þér, reikni?“ Spurt var um eftirfarandi reiknimáta: í huganum, á vasareikni, á blaði, í tölvu. Valkostir voru: oft, stundum, aldrei. Úrvinnslu á þessari rannsókn er ekki lokið en í úrtaki svara kemur í ljós að í aðeins einu tilviki kemur svarið „oft“ frá >40% nemenda og það á við vasareikna. Það er einnig athyglivert að um 10% segjast aldrei sjá eldri heimilismenn reikna á blaði, sérstaklega þegar borið er saman við þær áherslur sem skólinn leggur á þennan þátt reiknings. Og ég þori að fullyrða að þetta misræmi er ekki skýrt með neinum gildum rökum fyrir nemendum.

Rannsóknir á sviði stærðfræðimenntunar
En samfara þjóðfélagsbreytingum, sem frá sjónarhóli stærðfræðikennarans hljóta að teljast mjög miklar, eru aðrar breytingar ekki veigaminni. Rannsóknunum á sviði stærðfræðimenntunar hefur fleygt fram undanfarinn aldarfjórðung, ekki síst síðustu 15 ár. Þessar rannsóknir eru stundaðar víða um heim og eru þau tímarit, sem gefin eru út á þessum vettvangi, talandi tákni um gróskumikið starf. Samstarf þjóða í milli á þessum vettvangi er ekki síst fyrir tilstuðlan alþjóðasamtakanna okkar: International Commission on Mathematical Instruction (ICMI). Við KHÍ eru keypt fjölmörg tímarit fyrir stærðfræðikennara, flest hugmyndarit með stuttum greinum en einnig rannsóknaritin:

Educational Studies in Mathematics
Journal for Research in Mathematics Education
For the Learning of Mathematics
Nordisk Matematik Didaktik (NOMAD)

Þessi tímarit eru öll orðin til á síðasta aldar-
Flatarmál 2(2)



fjórðungi, NOMAD er nýjast en það hóf göngu sína 1993. Ekki er nokkur vafi á að öll sú hreyfing, sem fylgdi nýstærðfræðinni, og uppstokkun gilda, sem þá átti sér stað, hafði þau áhrif að fólk fór að skoða ýmis atriði miklu skilvirkar en fyrr. Sums staðar misstigu menn sig en lærðu af reynslunni og hrykkju þeir ekki til baka í afturhvarfsgír stóðu þeir uppi sterkari og fróðari en fyrr. En að hverju hafa rannsóknir á sviði stærðfræðimenntunar beinst? Lítum aðeins á örfá atriði til dæmis:

- 1 **Hvað læra börn og unglingar í stærðfræði án formlegs náms?** Í þeim þjóðfélögum þar sem börn njóta ekki öll skólagöngu eru börn götunnar skoðuð og kannað hvernig þau leysa stærðfræðileg viðfangsefni síns lífs.
- 2 **Hvaða möguleika gefa tæknimiðlar í stærðfræðinámi,** ekki aðeins til að reikna út heldur hvernig nota megir vasareikna og tölvur til þess að læra stærðfræði? Þar hefur þekkingu manna fleygt fram á síðasta áratug og reyndar um lengra skeið.
- 3 **Hlutur málnotkunar í stærðfræðinámi** er gróskumikið rannsóknasvið sem beinir m.a. sjónum að því hvernig nemendur skilja stundum á allt annan hátt en kennari gerir ráð fyrir og miðar við í kennslu sinni.
- 4 **Hvernig meta menn skilning nemenda á markvissan hátt** og á hvern hátt getur nemandi sjálfur tekið þátt í því? Slíkar rannsóknir eru mjög mikilvægar þegar menn hugsa sér til hreyfings að fara að auka mat í skólakerfinu. Þá skiptir máli að við gerum þær kröfur til sjálfra okkar að við gerum það kunnáttusamlega og drögum fram þau atriði

sem skipta máli.

- 5 Hvaða öfl ráða því að stúlkur sækja síður á stærðfræðitengdar brautir í framhaldsskólum og háskólum en piltar? Þessi mál hafa verið rannsökuð á ýmsan hátt og talsvert um þau skrifað. Hér heima er ég sjálf í miðjum klíðum með rannsókn á þeim nemendum fjögurra árganga sem tóku grunnskólapróf með hæsta árangri. Með „hæsta árangri“ er átt við þá nemendur sem fengu A þegar hlutfallseinkunnir voru gefnar (um 7%) og hlutfallslega jafn stóra hópa frá síðari árum. Á þessum tímamótum eru hlutföll stúlkna og pilta í þessum stærðfræðilega snarpasta hópi nemenda nær hnífjöfn en eftir að skylduáföngum lýkur í framhaldsskóla breytist myndin mjög. Stúlkur á stærðfræðitengdum brautum eru við stúdentspróf mun færri en piltar en ýmislegt bendir til að þær standi sig jafn vel, t.d. sýna viðurkenningar Hins íslenska stærðfræðafélags það. Þannig er það fæðin sem er vandamál en ekki það að þær, sem velja þessar leiðir, ráði ekki við viðfangsefni til jafns við piltana. Allt annað er hins vegar uppi á teningnum þegar kemur að hinni svokölluðu stærðfræðikeppni framhaldsskólanna. Þar koma stúlkur varla fyrir í efstu sætum og það, sem kannske er ennþá athygliverðara, er að sá hópur sem hefur áhuga á að taka þátt í þessari keppni, er mjög lítil. Hann svarar í fjölda til aðeins um þriðjungs þeirra sem á grunnskólaprófi fá hæstu einkunn, sbr. skýringu hér á undan. Þessi keppni laðar nemendur greinilega ekki til leiks.

- 6 Hvaða hugmyndir gera nemendur og einnig kennarar sér um stærðfræði og eðli stærðfræðináms og einnig hvaða áhrif hafa slíkar hugmyndir, oft óyrtað, á bæði skipan náms og kennslu?

Rannsóknir á viðhorfum

Vert er að líta nánar á hvað rannsóknir á þeim hugmyndum, sem nemendur og kennarar gera sér um stærðfræði, leiða í ljós. Algengar skoðanir eru eftirfarandi (Frank 1988):

- Stærðfræði er reikningur.
- Ef ekki er hægt að leysa verkefni í stærðfræði á minna en 5 mínútum er eitthvað að verkefninu eða nemandanum.
- Markmið með því að leysa stærðfræði-

verkefni er að finna rétta svarið.

- Í kennslu og námi er nemandinn óvirkur og kennarinn virkur.

Hugmyndir af þessum toga stríða hins vegar gegn þeim rannsóknaniðurstöðum sem kenningar um virkt stærðfræðináms grundvallast á. Bent er á að viss hringrás haldi hugmyndum, eins og þeim sem hér er lýst, við lýði. Námsreynsla nemenda getur haft veruleg áhrif á hugmyndir þeirra um hvað það merki að læra stærðfræði. Og síðan hafa hugmyndir þeirra um stærðfræði talsverð áhrif á það hvernig þeir nálgast ný atriði og ný viðfangsefni í stærðfræði. Og enn fremur hafa þessar hugmyndir veruleg áhrif á mat þeirra á eigin getu í stærðfræði, á það hversu fúsir þeir eru að takast á við stærðfræðiverkefni og að lokum heildarafstöðu þeirra til stærðfræði.

En hvað er stærðfræði? Eru allir sammála um það? Er hægt að segja að stærðfræði sé nú alltaf stærðfræði eins og þar standi allir á sama grunni í skilningi sínum? Í rannsókn Roberta Mura í Canada var skoðað hvaða hugmyndir háskólakennarar í stærðfræði gerðu sér um stærðfræði. Þar kom m.a. fram að þeir skiptust jafnt í afstöðu sinni til þess hvort stærðfræði væri list (art) eða vísindi (science). Ekki voru þeir heldur sammála um hvort stærðfræði væri sköpuð (created) eða uppgötvuð (discovered).

Sumir kunna að halda að hugmyndir manna og viðhorf skipti ekki miklu máli, meginatriðið sé að „kunna að leysa dæmin“. En svo er ekki. Rannsóknir hafa glögglega sýnt þær takmarkanir sem kunnátta í reikni-aðferðum (algoritnum) hefur. Það að þekkja staðreyndir og kunna aðferðir er engan veginn nóg til að tryggja að sá, sem um ræðir, nái árangri í stærðfræði. Ýmislegt fleira skiptir engu minna máli (Garfalo 1989).

Og þegar athygli er beint að því hvaða gildi kunnátta í hefðbundnum reikni-aðferðum hafi, verður ekki undan því skorast að líta á þær breytingar sem síaukin tækni hefur í för með sér. Í grein sinni: *Living with a New Mathematical Species* segir Lynn Arthur Steen: *Until recently, mathematics was a strictly human endeavor. But suddenly, in a brief instant on the time scale of mathematics, a new species has entered the mathematical ecosystem. Computers speak mathematics, but in a dialect that is difficult for some humans to understand.* Og hann heldur áfram: *Just as the introduction of calculators upset the comfortable pattern of primary school arithmetic, so the spread of computers will upset the traditions of secondary and tertiary mathematics. This year*

long division is passé: next year integration will be under attack.

Tími leyfir ekki að fara víðar um völl stærðfræðimenntunar. Beinum sjónum að lokum að okkar eigin aðstæðum. Í aðurnefndri rannsókn minni frá 1992, sem reyndar á sér eldri systur frá 1980, var leitað eftir hugmyndum ungmenna um mikilvægi stærðfræði í þeirra daglega lífi og í öðrum námsgreinum. Í mjög samandregnu máli má segja að fullkomið ósamræmi sé milli þeirra væntinga sem þau hafa til stærðfræðinotkunar sinnar í framtíðinni og þeirrar notkunar sem þau gefa upp að raunverulega eigi sér stað hjá þeim nú. Þau vænta þess almennt að nota stærðfræði mjög mikið eða mikið. Þau skynja almennt ekki að þau noti stærðfræði í neinum verulegum mæli nú.

Það er ekki hægt að láta hjá líða að tengja þessar niðurstöður rannsókn sem gerð var meðal stærðfræðikennara unglingastigsins vorið 1987. Þetta var ítarleg rannsókn á áliti kennara á ýmsum þáttum stærðfræðikennslu og söfnun upplýsinga um skipulag hennar og framkvæmd. Meðal annars var þar spurt hvert meginmarkmið með stærðfræðikennslu á unglingastigi væri að mati hvers kennara. Fyrir kom að sjálfsögðu að kennarar nefndu fleira en eitt. Yfir 50% nefndu undirbúning fyrir framhaldsnám. Yfir 40% nefndu undirbúning fyrir daglegt líf sem nemendur lifðu þá. Þar sem unglingarnir á aldrinum 13 – 16 ára lifa virku lífi, sem bæði býður ýmis tækifæri til að beita stærðfræði og gerir um leið kröfur til stærðfræðilegrar glöggskyggni, er þessi ofuráhersla á það, sem koma skal í stað þess sem er, verulegt áhyggjuefni.

Dulin viðhorf

Viðhorf koma víða í ljós í gerðum fremur en orðum og því miður oft án þess að miklar umræður hafi átt sér stað. En um getur verið að ræða mikilvæg atriði sem hafa sterk áhrif á líf nemenda. Lítum t.d. á viðhorf sem endurspeglast nú í gerð og skipan samræmds prófs í stærðfræði.

Í 10. bekk er val á milli algebru og verkefna úr daglegu lífi. Þetta val nemur nú 10% prófsins. Viðast hvar er lögð mikil áhersla á að nemendur velji algebru vegna möguleika þeirra í framtíðinni. Með hliðsjón af þessu er unnt að fullyrða:

Öllum þorra nemenda er gert skylt að kunna og geta beitt eftirfarandi reglu:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Flatarmál 2(2)

og á prófinu er aðgætt hvort þeir endurbekki þetta samhengi ef í stað a stendur x og í stað b stendur y eða almennt hvort þekking þeirra þoli ný breytuheiti. Hins vegar er ekki prófað hvort þeir geta beitt þessari þekkingu á talnasambönd og þannig sýnt í verki að þeir hafi náð að láta algebruskilning auka hæfni sína í hugareikningi en það er óneitanlega einn af mikilvægari kostum þess að hafa þá yfirsýn sem algebra getur veitt.

En ekki er nóg með það að tengingu algebru yfir í talnareikning sé áfátt heldur er hróplegt misræmi milli þess, sem þarna er talið nauðsynlegt að allir kunni, og þess sem fólk raunverulega þarf að kunna í öllu daglegu lífi. Þetta birtist m.a. í því að nemendur, eins og áður er sagt, þurfa að kunna reglu um mismun tveggja ferningstalna en nemendur fá gefna á sérstöku stórletruðu blaði reglu um flatarmál rétthyrnings. Hvað er fólk eiginlega að hugsa? Eða hefur gleymst að hugsa?

Lokaorð

Í spurningu okkar í dag leynist bæði alvara og forvitni. Hún er þess virði að glíma við. Við getum öll blandað okkur í umræðuna og þannig fært okkur hana í nyt til að tala meira og betur saman um það stærðfræðinám sem við bjóðum nemendum okkar á hvaða aldri sem er. Veigamikil atriði þarf að draga inn í þá umræðu. Nokkur þeirra hefi ég reynt að drepa á og benda um leið á að þessi umræða er bæði ögrandi og gjöful í nágrannalöndum okkar og víðar. Blöndum okkur í hana og glímum einnig við spurningu dagsins með hliðsjón af íslenskum aðstæðum. Og drögum nemendur okkar inn í þessa umræðu eftir megni með því að gefa þeim kost á að sjá hvar þeir eru að beita stærðfræði og hvers virði stærðfræðikunnátta er þeim ekki aðeins í framtíðinni heldur líka núna.

Nokkrar heimildir:

Joe Garofalo (1989) *Beliefs and Their Influence on Mathematical Performance*. Mathematics Teacher. October 1989.

Steen, Lynn Arthur (1992) *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and Its Teaching*. UNESCO.

Frank, Martha L. (1988) *Problem solving and Mathematical Beliefs*. Arithmetic Teacher 35 (January 1988)

Mura, R. (1993) *Images of Mathematics held by University Teachers of Mathematical Sciences*. Educational Studies of Mathematics 25(4).

Anna Kristjánsdóttir er formaður Flatar.