Málgagn Flatar samtaka stærðfræðikennara

FLATARMÁL

1. tbl., **28. árgangur 2021**

FLATARMÁL 1. TBL., 28. ÁRG. 2021
Málgagn Flatar, samtaka stærðfræðikennara
© 2021 Flatarmál

Útgefandi
Flötur, samtök stærðfræðikennara
Borgartún 30, 105 Reykjavík

Stjórn Flatar
Formaður: Þórunn Jónasdóttir (Hörðuvallaskóla) thorunnjona@kopavogur.is
Gjaldkeri: Hrafnhildur Pálsdóttir (Hörðuvallaskóla) hrafnpal@kopavogur.is
Ritari: Kristín Einarsdóttir (Salaskóla) kreinars99@gmail.com
Meðstjórnandi: Edda Jónsdóttir (Árbæjarskóla) Edda.Jonsdottir@rvkskolar.is
Meðstjórnandi: Imke Schirmacher (Lágafellsskóla) imke@lagafellsskoli.is
Meðstjórnandi: Kristjana Skúladóttir (Melaskóla) Kristjana.Skuladottir@rvkskolar.is

Vefsíða Flatar
https://www.ki.is/faggreinafelog/flotur-samtok-staerdfraedikennara/

Ritnefnd Flatarmála
Birna Hugrún Bjarnardóttir, Menntavísindasviði Háskóla Íslands
Áslaug Dóra Einarsdóttir, Laugalækjarskóla
Guðbjörg Pálsdóttir, Menntavísindasviði Háskóla Íslands
Margrét S. Björnsdóttir, Menntavísindasviði Háskóla Íslands

Prófarkalestur
Kristín Einarsdóttir
Birna Hugrún Bjarnardóttir

Umbrot og myndvinnsla
Jón Reyr Jóhannesson
https://jonjohannesson.com

Prentun
Guðjón Ó. – Vistvæna prentsmiðjan

Mynd á forsíðu

Myndin er tekin af Birni Grötting. Hún er af kirkjugólfi sem er rétt við Kirkjubæjarklaustur. Gólfið er um 80 m^2 jökul- og brimsorfinn stuðlabergsflötur þar sem sést ofan á lóðréttar blágrýtissúlur. Þarna hefur aldrei staðið kirkja en það er engu líkara en flöturinn hafi verið lagður af manna höndum. Kirkjugólfið er friðlýst náttúruvætti.

Til höfunda greina í Flatarmálum

Skil á greinum fyrir næsta blað má senda með tölvupósti til ritstjóra Flatarmála Birnu Hugrúnar á netfangið birnahugrun@gmail.com. Hverri grein skulu fylgja upplýsingar um nafn höfundar, starfsheiti og stofnun sem hann vinnur hjá. Höfundur er beðinn um að koma með tillögur að aðalfyrirsögn, millifyrirsögnum og myndatextum. Ljósmyndir, teikningar og myndrit skulu ekki sett inn í texta greinar, heldur vistuð sem stakar skrár. Númer eða nafn myndar komi fram í texta. Ritstjórn Flatarmála tekur endanlega ákvörðun um birtingu greina. Grein er skrifuð á ábyrgð höfundar. Ekki er greitt fyrir greinaskrif í blaðið.

RITSTJÓRAPISTILL

ÁGÆTU LESENDUR

Ritstjórnin leggur sig fram um að hafa efni blaðsins sem fjölbreyttast svo kennarar á öllum skólastigum finni eitthvað við sitt hæfi. Að þessu sinni er sagt frá áhugaverðu Menntafléttunámskeiði fyrir leikskólakennara sem var fyrst kennt undir heitinu *Stærðfræðinám í leikskóla* en ber nú heitið *Stærðfræðin í leik barna.* Fyrir grunnskólakennara er grein og frásagnir sem fjalla um verkefni tengd hæfniviðmiðum aðalnámskrár og eru þær skrifaðar í kjölfar námstefnu Flatar sem fór fram 30. apríl sl. á netinu. Einnig má finna grein um kennsluaðferðina *Hugsandi skólastofa* þar sem sagt er frá verkefnavinnu unglinga. *Söguhorn* Kristínar Bjarnadóttur er á sínum stað og að þessu sinni segir hún okkur hvaða aðferð var beitt fyrr á öldum við að mæla og smíða kringlótt ker. Einnig eru fréttir af *starfsemi Flatar* á sínum stað í blaðinu svo að félagsmenn fái vitneskju um starfsemi samtakanna. Fyrir þá sem hafa áhuga á talnafræði er áhugaverð grein um snillingana Evklíð og Euler og leit þeirra að fullkomnum tölum. Bjarnheiður Kristinsdóttir varði doktorsritgerð sína um *hljóðlaus myndbönd í stærðfræðikennslu* nú í haust og í grein sinni gefur hún okkur innsýn í þessa áhugaverðu nálgun í kennslu sem er skemmtileg viðbót við aðrar kennsluaðferðir. Í blaðinu er einnig myndasaga sem kynnir kennsluaðferðina *Talað um tölur* á nýstárlegan hátt. NORMA 20 er norræn ráðstefna um rannsóknir á sviði stærðfræðimenntunar og var hún haldin í júní sl. og fór fram á netinu að þessu sinni. Nokkrir Íslendingar sóttu ráðstefnuna og sumir þeirra fluttu þar erindi. Í blaðinu má finna stutta samantekt af því sem fram fór á ráðstefnunni.

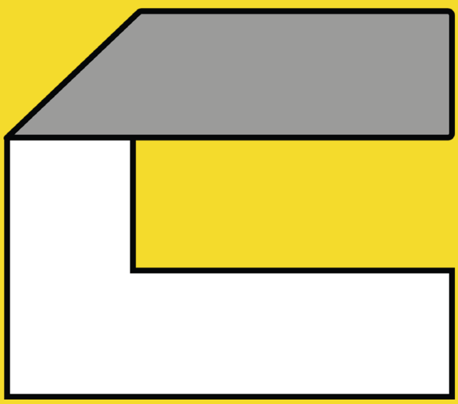
Umræður hafa verið í ritstjórn Flatarmála og stjórn Flatar um hvort nú sé tímabært að hætta að gefa Flatarmál út á prenti og færa það yfir á vefinn. Það er mikill kostnaður sem fylgir því að prenta og senda Flatarmál út til félagsmanna og þar að auki er rætt um að það sé umhverfisvænna að vista það á vefnum. Það sem skiptir þó öllu máli er að blaðið sé lesið og þá er hægt að velta því fyrir sér hvort það verði frekar lesið á vef eða hvort það týnist á veraldarvefnum þar sem er ærið lesefni fyrir. Til stendur að senda rafræna könnun til félagsmanna Flatar í byrjun næsta árs til að kanna hug þeirra varðandi útgáfu blaðsins á komandi árum.

Með vinsemd og virðingu,

Birna Hugrún Bjarnardóttir
ritstjóri Flatarmála

ÞRAUT

Þetta er hástafur sem hefur verið klipptur út úr pappír og brotinn einu sinni. Hvaða bókstafur er þetta ef þetta er ekki stafurinn L?



Lausnina má sjá á blaðsíðu 18.

FRÉTTIR AF STARFSEMI FLATAR

Starf samtakanna hefur að töluverðu leyti litast af takmörkunum í heimsfaraldri en þó hefur eitt og annað verið á dagskrá sem verður rekið hér í stuttu máli.

Þann 7. nóvember 2020 var aðalfundur samtakanna haldinn og í tengslum við hann var haldin fjarnámstefna. Á henni var boðið upp á þrjár vinnustofur. Þær voru: Hugsandi skólastofa, listsköpun í stærðfræðikennslu og starfsþróun – leiðtoganám. Áslaug Dóra Einarsdóttir, grunnskólakennari í Laugalækjarskóla hélt stutta kynningu á hugsandi skólastofu. Hugmyndin byggir á kenningum Peter Liljedahl sem fjallað var um í Flatarmálum 2018 og 2019. Þátttakendur kynntust verkefnum af unglingastigi, glímdu við þau og ræddu lausnarferlið. Michelle Lynn Mielnik, grunnskólakennari í Fellaskóla í Fellabæ sagði frá hvernig hún byggir kennslu sína í 2. og 4. bekk á hugmyndum um hugsandi skólastofu. Borghildur Jósúadóttir, grunnskólakennari í Grundaskóla kynnti hvernig hún hefur unnið með listsköpun í stærðfræðikennslu sinni. Þátttakendur prófuðu nokkur verkefni og ræddu saman um reynslu sína. Birna Hugrún Bjarnardóttir, Guðbjörg Pálsdóttir, Jónína Vala Kristinsdóttir og Sólveig Zophoníasdóttir frá HÍ og HA kynntu starfsþróunarverkefnið: Námssamfélag stærðfræðikennara undir leiðsögn stærðfræðileiðtoga. Um er að ræða verkefni sem byggt er á hugmyndum Matematiklyftet í Svíþjóð. Markmið verkefnisins er að styðja við umræðu og þróun stærðfræðikennslu með því að kennarar myndi námssamfélag, lesi, ræði, prófi, þrói og meti viðfangsefni á afmörkuðu sviði stærðfræðináms og -kennslu. Þátttakendur fengu tækifæri til að skoða viðfangsefni og ræða starfsþróunarlíkanið sem byggt er á. Þátttaka á námstefnunni var með ágætum og gaman að segja frá því að fólk víða af landinu tók þátt.

Næsta verkefni samtakanna var Jóladagatal Flatar en það var útbúið af stjórn og sent rafrænt á alla félagsmenn og í alla grunnskóla. Dagatalið hlaut góðar viðtökur og vilji er til að festa þetta verkefni í sessi.

Tímarit samtakanna Flatarmál kom út í lok árs og var það sent til félagsmanna auk þess sem það var sent á alla grunnskóla landsins með ósk um styrk fyrir samtökin. Mjög margir skólar brugðust vel við þeirri bón.

Dagur stærðfræðinnar var nú haldinn í fyrsta sinn á Íslandi á alþjóðadegi stærðfræðinnar, þann 14. mars 2021. Einhverjir skólar höfðu ekki uppfært daginn þannig að hann var enn inni á fyrsta degi febrúarmánaðar og síðan er hefðin sterk, þannig að sumir skólar á landinu héldu upp á daginn í febrúar. Ákveðið var að vísa kennurum á efni á heimasíðu alþjóðadags stærðfræðinnar https://betterworld.idm314.org/ sem gefið var út í tilefni dagsins en þema ársins var: *Stærðfræði bætir heiminn* (e. Mathematics for a Better World). Þar var lögð áhersla á að stærðfræði væri alls staðar bæði nytsamleg og fagurfræðileg.

Námstefnu sem átti að vera í mars 2020 var frestað vegna Covid-19. Því var ákveðið að hafa námstefnuna með sama efni föstudaginn 30. apríl 2021 og þá sem fjarnámstefnu. Aðalefni námstefnunnar voru hæfniviðmiðin í stærðfræði, kennsla og námsefni/verkefni/viðfangsefni sem byggja á þeim og hvernig skal meta, það er að segja námsmat byggt á hæfniviðmiðunum. Aðalfyrirlesarar voru þær Elisabeth Tang og Connie Nielsen frá Danmörku. Þær hófu námstefnuna með fyrirlestri og enduðu hana með vinnustofu. Þar á milli voru starfandi kennarar í grunn- og framhaldsskólum með vinnustofur þar sem þeir deildu með þátttakendum hugmyndum af vinnu sem byggir á hæfniviðmiðum og námsmatinu sem þeim fylgir. Vinnustofum var skipt niður eftir aldri nemenda; yngsta stig grunnskóla og leikskóli, miðstig, unglingastig og síðan framhaldsskóli.

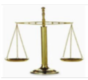
Heimasíða Flatar hefur legið niðri undanfarin ár. Hún er vistuð undir heimasíðu KÍ og þegar KÍ setti upp nýja vefsíðu varð síða samtakanna óvirk. Ekki hefur unnist

JÓLADAGATAL FLATAR

1. desember

Það eru 27 epli á borði. 26 þeirra eru nákvæmlega jafnþung en 1 epli er léttara. Eina verkfærið sem þú hefur er skálarvog sem sýnir jafnvægi.

Hvað þarftu að vigta oft til þess að finna létta eplið og hvernig ferðu að því?



2. desember

Finndu næstu tvær tölur í talnaröðinni

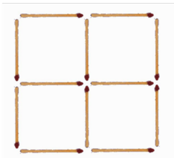
3600, 1800, 600, 150, _______, ________

3. desember

Stebbi á kanínur og páfagauka. Sameiginlega eru höfuðin 15 og fæturnir 50. Hvað á Stebbi margar kanínur og hvað á hann marga páfagauka?

4. desember

Færðu 4 eldspýtur til að fá 2 stærri og 8 minni ferninga



5.desember

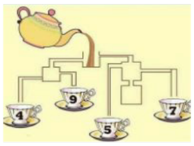
Þrír jólasveinar borða 5 epli á dag. Hvað þarf þá mörg epli fyrir 32 jólasveina?

6.desember

Systkynin sjö á Brekku ákváðu að gefa pabba sínum Jólarós. Þar sem börnin eru misgömul og misefnuð lögðu þau mis-mikið til. Engin tvö barnanna lögðu til sömu upphæð. Hvert barnanna gaf að minnsta kosti 100 krónur og ekkert barnanna gaf meira en 1100 krónur, enginn gaf 700 krónur. Rósin kostaði 3300 krónur. Hversu mikið gáfu börnin hvert og eitt? Upphæðirnar voru í hundruðum.

7. desember

Hvaða jólabolli fyllist fyrstur?



8. desember

Hvaða tala kemur næst?

2 – 3 – 5 – 7 – 11 – 13 - _______

9. desember

Færðu 2 eldspýtur til að fá 4 jafnhliða þríhyrninga

10.desember

Í ferningslaga herbergi á að raða 10 stólum þannig að jafn margir séu við hvern vegg. Hvernig er hægt að raða stól-unum?

11. desember

Sigga eyðir helming af því sem Kristín gerir í jólagjafir þetta árið og Lóa eyðir 3 sinnum meira en Sigga gerir. Samanlagt eyða þær 720 krónum.

Hversu miklu eyðir hver þeirra í jólagjafir?

12. desember

Hversu margir ferningar eru á myndinni?

13. desember

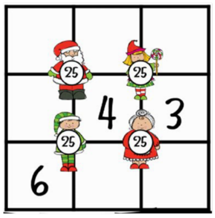
Hversu margar jólakúlur átti Hrafnhildur? Hún gaf Þórunni helminginn og síðan gefur hún Kristínu helminginn af því sem eftir er. Þá á hún 6 eftir.

14. desember

Óli og Jói fæddust báðir 25. desember. Þegar Óli var 6 ára var Jói helmingi yngri. Þegar Óli verður 100 ára hversu gamall verður Jói þá?

15. desember

Jóladagur er 25. desember. Uppáhaldstala jólasveinsins er 25. Settur tölurnar frá 3—11 inn í ferningana. Samanlögð summa talnanna í ferning ætti að vera 25. Það er búið að setja inn 3, 4 og 6 fyrir þig.



16. desember

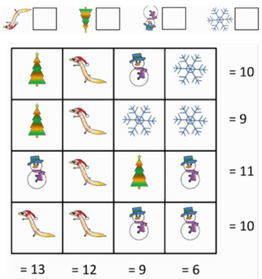
Boltar skoppa misvel. Ef boltanum hans Sveinka er sleppt í ákveðinni hæð skoppar hann hálfa leiðina upp aftur. Sveinki fór upp í háan turn. Hann ákvað þar að henda boltanum niður til Stúfs. Boltinn skoppaði og skoppaði áður en Stúfur náði honum. Þegar boltinn snerti jörðina í 5. sinn hafði hann farið samtals 368 fet. Í Englandi er gjarnan talað um fet frekar en metra. Hversu hár var turninn í fetum

17. desember

Í húsi einu eru 13 dýr. Bæði kettir og fuglar. Ef það eru 3 fleiri fulgar en kettir hversu mörg dýr eru af hvorri tegund?

18. desember

Hvaða tala er á bak við hvert tákn á myndinni?



19. desember

Hvaða tala er næst í röðinni?

2—5—11—23—47—95—______

20.desember

Ef þú margfaldar með þessari tölu muntu alltaf fá sama svarið. Hver er talan?

21. desember

Í fjölskyldu einni eru sjö systur og hver systir á einn bróður. Fjölskyldan á tíu manna bíl. Eru sætin í bílnum nægjanlega mörg fyrir alla í fjölskyldunni, bæði foreldra og börn?

22.desember

Hvað voru margir gestir í jólaboði ef ein skál af baunum var fyrir hverja tvo gesti, ein skál af grænmeti fyrir hverja þrjá gesti og ein skál af kjöti fyrir hverja fjóra gesti? Í jólaboðinu voru notaðar 65 skálar samtals.

23.desember

Jólatréð er hlaðið jólakúlum í fjórum mismunandi litum. Það vantar að seta númer á sumar kúlurnar. Hver litaröð hefur númer frá 1—7 og í hverri lá-réttri röð má hver tala einungis koma fyrir einu sinni.

24. desember

Á jólamarkaði er hægt að kaupa heitt kakó og köku fyrir 180 krónur. Bolli af heitu kakói kostar 100 krónum meira en kaka. Hversu mikið kostar bolli af kakói og hversu mikið kostar kakan?

tími til að færa efni samtakanna inn á nýja síðu fyrr en nú í nóvember þegar ráðinn var inn verktaki til að sinna þessu og strax má sjá efni komið inn á nýju síðuna sem er á þessari slóð, https://www.ki.is/faggreinafelog/flotur-samtok-staerdfraedikennara/. Mikil ánægja er með þessa þróun mála og vonir standa til að vefsíðan verði öflugur vettvangur stærðfræðikennara þar sem hægt er að setja inn fagefni, fréttir og fleira.

Á aðalfundi samtakanna þann 6. nóvember síðastliðinn var ákveðið að kanna möguleikana á að færa Flatarmál alfarið yfir á netið. Verður hugur félagsmanna til þess kannaður en Flatarmál 2021, sem þið eruð nú með í höndunum verður þá hugsanlega það síðasta sem verður prentað og sent til félagsmanna.

Við köllum eftir öflugu fólki sem vill leggja sitt af mörkum við framgang samtakanna. Nú er staðsetning félagsmanna um allt land og jafnvel erlendis ekki fyrirstaða, því öll kunnum við orðið vel á fjarfundabúnað og kunnum að láta tæknina vinna með okkur.

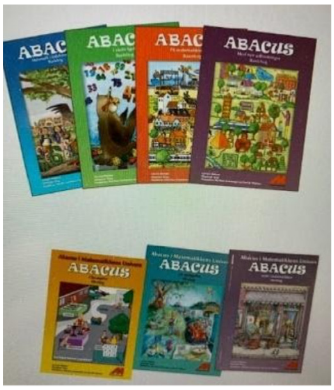
Fyrir hönd stjórnar Flatar

Þórunn Jónasdóttir, formaður

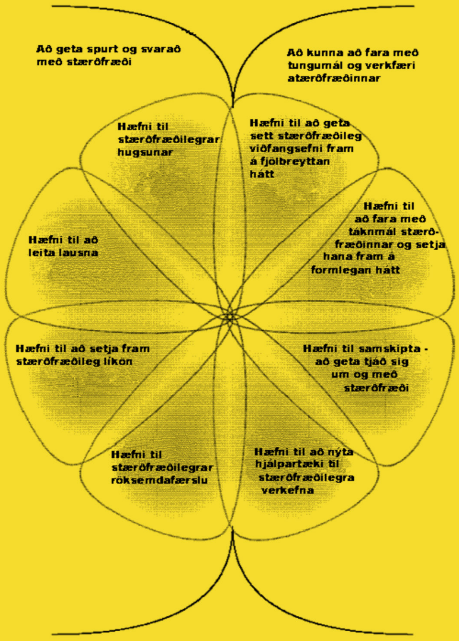
DÖNSK HÆFNIVIÐMIÐ Í STÆRÐFRÆÐI

Greinin er byggð á fyrirlestri Elisabeth Tang og Connie Nielsen á rafrænni námstefnu Flatar í apríl 2021 þar sem þær héldu aðalfyrirlesturinn.

Elisabeth og Connie eru frá Danmörku og eru í danska stærðfræðikennarafélaginu. Önnur þeirra vinnur hjá danska stærðfræðiforlaginu, en hin kennir í grunnskóla. Þær hafa meðal annars gefið út stærðfræðinámsefni fyrir 6 – 12 ára nemendur sem nefnist ABACUS, ásamt ýmsu öðru námsefni fyrir nemendur á yngri stigum grunnskóla.



Danir byggja aðalnámskrá sína í stærðfræði á hæfniviðmiðum Mogens Niss eins og við hér á Íslandi. Í upphafi voru hæfniviðmiðin í aðalnámskrá Danmerkur átta og byggðu á hæfniviðmiðablómi sem Mogens Niss og fleiri settu fram.

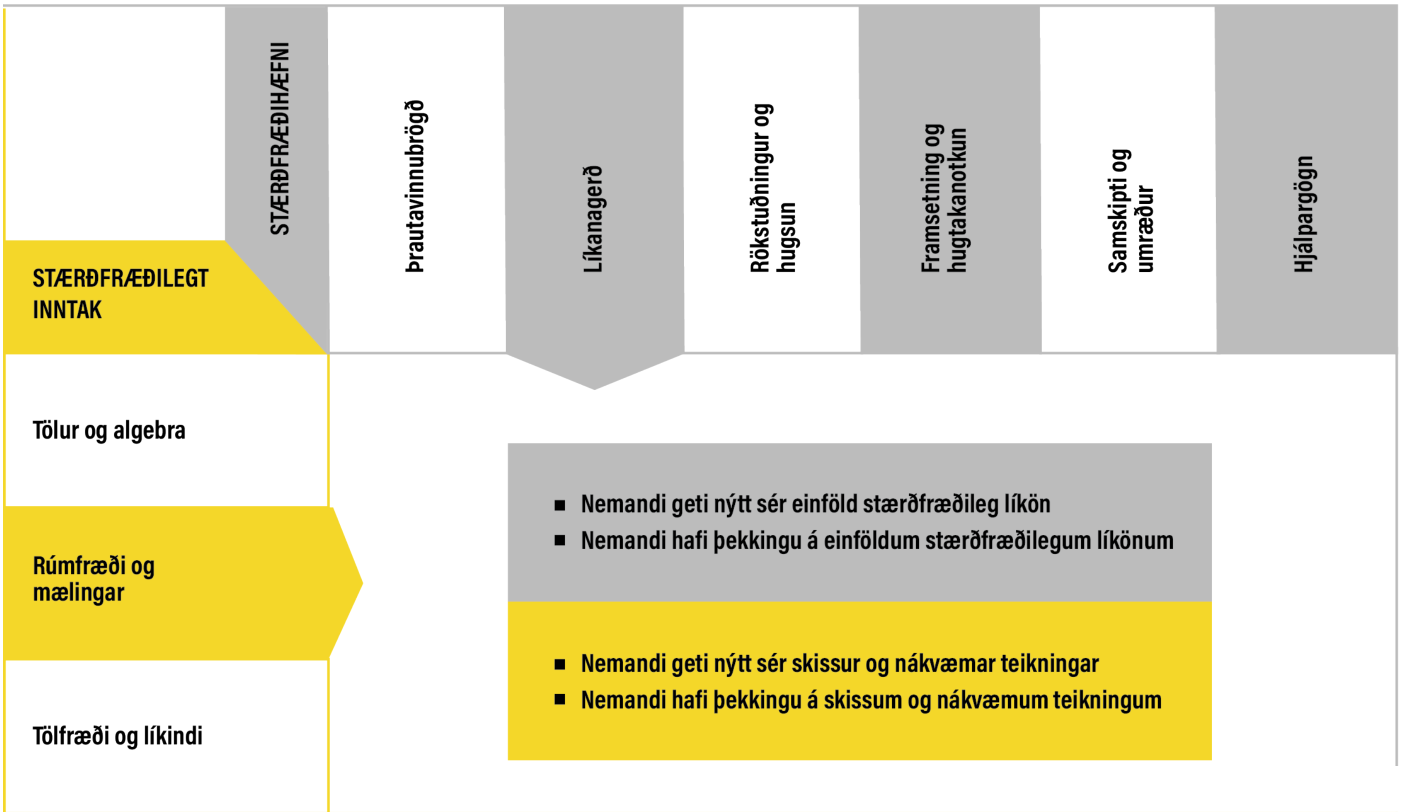


Hæfniviðmið sem Mogens Niss og Tomas Højgaard Jensen settu fram.

Í AÐALNÁMSKRÁ GRUNNSKÓLA Í STÆRÐFRÆÐI Í DANMÖRKU ERU NÚ SEX HÆFNIVIÐMIÐ:

1. **Þrautavinnubrögð** sem er um lausnaleiðir og framsetningu á stærðfræðiþrautum. Það er að segja stærðfræðiþrautum sem ekki er hægt að leysa eingöngu með hefðbundum leiðum.
2. **Líkanagerð** sem á meðal annars við um leiðir þar sem hægt er að nýta stærðfræði í vissum aðstæðum og verkefnum utan stærðfræðinnar. Einnig er hér átt við greiningu og mat á stærðfræðilíkönum sem lýsa raunverulegum tengslum.
3. **Rökstuðningur og hugsun** sem er um útskýringar.
4. **Framsetning og hugtakanotkun** sem er um notkun og skilning á stærðfræðilegri framsetningu og hugtakanotkun.
5. **Samskipti og umræður** sem er að geta nýtt sér og túlkað stærðfræði og sett sig inn í hugsun og útskýringar annarra.
6. **Hjálpargögn** er um þekkingu, notkun og val á stærðfræðilegum gögnum.

Taflan sýnir hvernig stærðfræðihæfni og stærðfræðilegt inntak eru samþætt í verkefnavinnu nemenda.



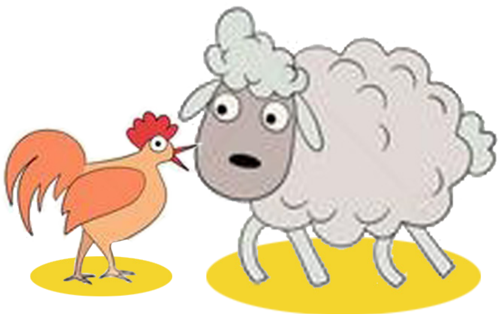
Elisabet og Connie sýndu dæmi um hvernig þær nýta hæfniviðmiðin til þess að undirbúa kennslu þar sem hæfniviðmiðið er líkanagerð og stærðfræðilega inntakið rúmfræði og mælingar, sjá mynd hér fyrir ofan úr fyrirlestri þeirra.

Hér fyrir neðan og á næstu blaðsíðu má sjá dæmi um nokkur verkefni sem þær sýndu í fyrirlestri sínum.

Hænur og kindur

Hæfniviðmið:

- Þrautavinnubrögð
- Hjálpargögn
- Lausnaleið og hugsun
- Tölur



Verkefni:

Á bóndabæ eru bæði hænur og kindur. Bóndinn veit að höfuðin á þeim eru samtals 26 og fæturnir 74.

Hvað eru margar hænur og kindur á bóndabænum?

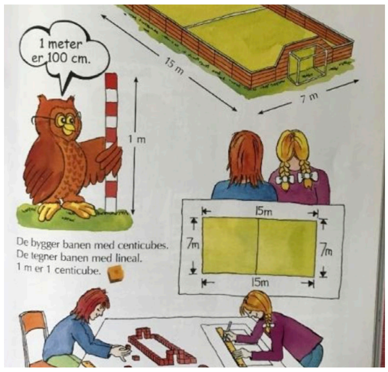
Líkanagerð og rúmfræði

Verkefni:

Fótboltavöllur er 15 metra langur og 7 metrar á breidd.

Byggið fótboltavöllinn með sentikubbum.

Teiknið fótboltavöllinn með reglustiku þar sem 1 m jafngildir 1 sentikubb.



Líkanagerð

Hæfniviðmið:

- raunveruleiki
- stærðfræðilegt líkan

Verkefni:

Hvað sérðu mörg blóm á myndinni?

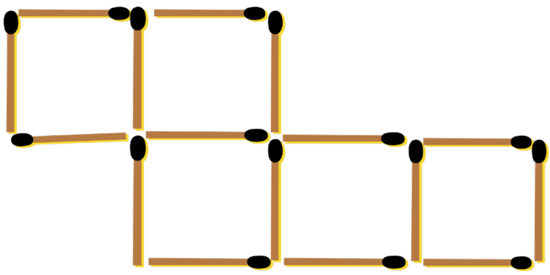
Ferningar

Hæfniviðmið:

- Þrautavinnubrögð
- Hjálpargögn
- Lausnaleið og hugsun

Verkefni:

Getið þið búið til fjóra ferninga með því að flytja 2 eldspýtur?



Þær Elisabeth og Connie nefndu einnig eftirtalin dæmi um verkefni sem krefjast umræðna og samskipta;

- reiknisögur
- para- eða hópvinna
- kynna verkefni
- nýta tölvutækni til kynninga
- spila í hópum
- útskýra spilareglur
- búa til nýjar spilareglur

Að lokum má nefna að þær Elisabeth og Connie voru einnig með verkstæði á námstefnunni þar sem þær létu þátttakendur leysa ýmis skemmtileg verkefni.

Kristjana Skúladóttir
kennari í Melaskóla

VINNUSTOFA FYRIR KENNARA Á YNGSTA STIGI

Ég ætla að skrifa nokkur orð um innlegg Imke Schirmacher á námstefnu Flatar 2021. Yfirskrift umfjöllunar hennar var *Kennsla, viðfangsefni og námsmat byggt á hæfniviðmiðum á yngsta stigi.*

Imke lagði út frá hæfniviðmiðum um algebru þar sem hún var búin að þrepa niður í áfanga hæfniviðmið við lok 4 bekkjar. Þar kveður á um að nemandi geti: „Fundið lausnir á jöfnum með óformlegum aðferðum og rökstutt lausnir sínar, t.d. með því að nota áþreifanlega hluti“. Þrepun hennar lítur svona út:

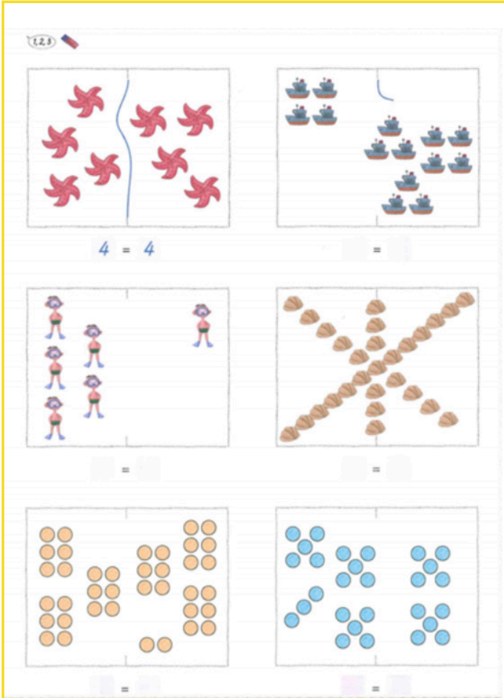
- **1. bekkur-Fundið lausnir á jöfnum (dæmi 5+ __= 15)**
- **2. bekkur-Fundið lausnir á jöfnum (dæmi 5 + 8 = 7 + __)**
- **3. bekkur-Fundið lausnir á jöfnum (dæmi 5 • 8 = 7 + __)**

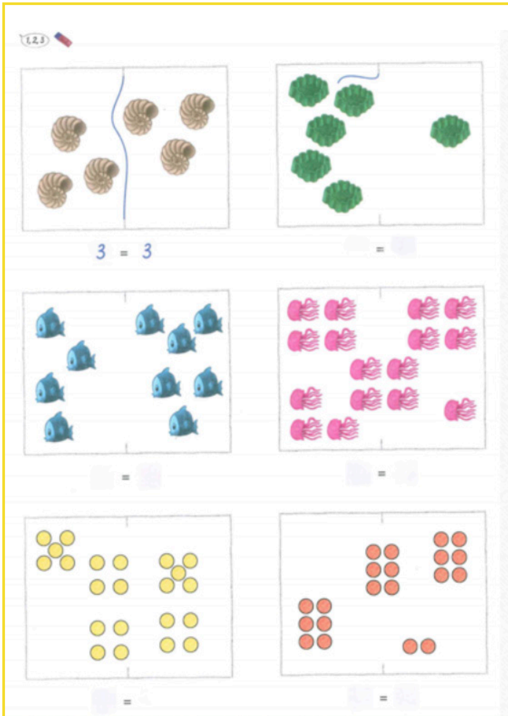
Hennar mat er að grunnurinn undir algebru sé að tryggja skilning á jafnaðarmerkinu eða jöfnunarmerkinu eins og hún nefnir það. Oftast túlki nemendur jafnaðarmerkið sem „eru“ og valdi það ómældum vandræðum þegar kemur að því að leysa jöfnur þar sem málið snýst um að stærðin sé hin sama beggja vegna jafnaðarmerkisins.

Hún mælir með að unnið sé djúpt og á sem fjölbreyttastan hátt að því að tryggja skilning og rétta notkun jafnaðarmerkisins, s.s. með skálavog, myndum, kubbum, tölum og formum. Hún gaf meðal annars dæmi um hvernig hægt er að láta yngri nemendur rannsaka mismunandi samsetningu talna með kubbum í tveimur mismunandi litum og um verkefni sem henta til að leita að óþekktum liðum í plúsheiti talna.

Námsmati hagar Imke þannig að hún skráir markmið hvers árgangs í Mentor og merkir jafn harðan við þegar nemandi hefur náð viðkomandi markmiði.

Mér fannst mjög áhugaverð sú nálgun sem Imke notar að því að tryggja skilning nemenda á jafnaðarmerkinu. Viðhorf hennar eru fullkomlega í takt við þær áhyggjur sem ég hef lengi haft af því að ekki sé unnið sem skyldi að því að tryggja skilning nemenda á jafnaðarmerkinu og að rétt sé lesið úr því. Fleiri yngri barna kennarar hefðu þurft að hlusta á þetta mikilvæga erindi.





Dóróþea Reimarsdóttir
Dalvík

VINNUSTOFA FYRIR KENNARA Á MIÐSTIGI

Á námstefnu Flatar þann 30. apríl sat ég vinnustofu sem var ætluð kennurum á miðstigi hjá Kristjönu Skúladóttur. Þar sagði Kristjana frá því hvernig hún hefur unnið með þrautalausnir í stærðfræði út frá hæfniviðmiðum aðalnámskrár. Hún fór í gegnum allt ferlið frá því hvernig viðmiðin eru krufin, hvernig kennslustundin er uppbyggð og hvernig námsmati á viðmiðum er háttað út frá verkefnunum. Hvað telst vera A hæfni, B hæfni og svo framvegis. Að lokum sýndi hún meðal annars myndbönd og dæmi frá nemendum sínum þar sem þeir voru að leysa slíkar lausnir með mjög fjölbreyttum hætti. Ekki er tekin fyrir nema ein þraut í einu en mikil áhersla lögð á úrvinnslu og útskýringar nemendanna.

Námskeiðið var afar gagnlegt enda Kristjana mjög fær í meðferð þrautalausna og gaman að sjá hvað hún nær mikilli dýpt í þessari vinnu með nemendum.

Vinnustofufyrirkomulagið fannst mér koma vel út og gott að hafa val á milli aldursstiga. Ég hef sjálf ekki mikla reynslu af miðstigi og því var afar gott að fá innlegg frá svona reyndum og færum kennara.

Ráðstefnan var rafræn í þetta sinn og mætti alveg nýta það fyrirkomulag oftar í framtíðinni í bland við raunheimahittinga.

Nanna María Elfarsdóttir
kennari í Brekkubæjarskóla

ÞRAUT

HÁRÞVOTTUR

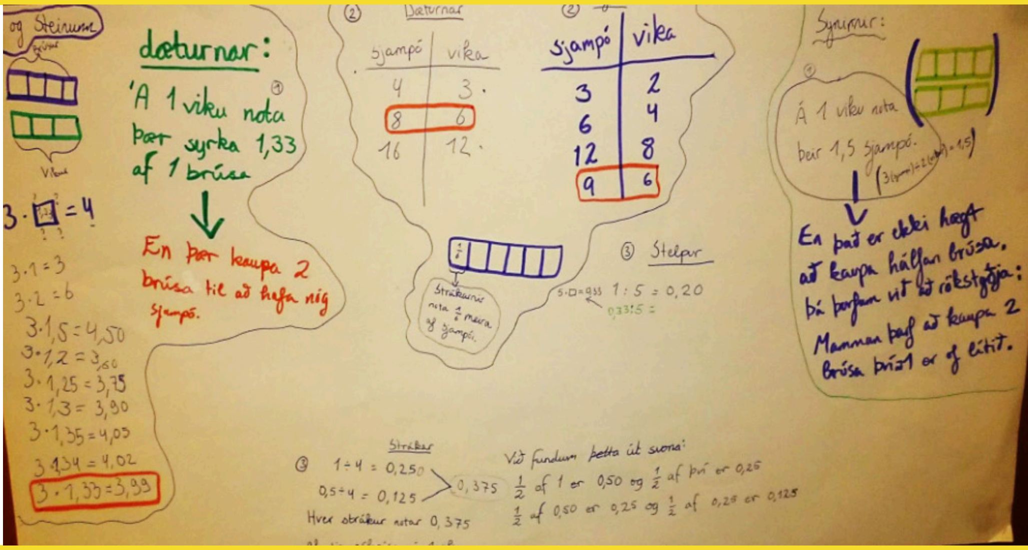
Tvær konur voru að kvarta undan því við hvor aðra að börn þeirra, sem eru á unglingsaldri, væru að þvo sér um hárið í tíma og ótíma.

Önnur móðirin sagði „synir mínir 4 nota 3 sjampóbrúsa á 2 vikum."

Hin svaraði „dætur mínar 5 nota 4 smampóbrúsa á 3 vikum."

1. Hvor þessara kvenna þarf að kaupa meira sjampó?
2. Og hversu mikið meira?
3. Hversu mikið sjampó notar hver strákur/stelpa?
4. Hversu lengi eru stelpurnar/strákarnir með 1 sjampóbrúsa?

DÆMI UM LAUSN NEMENDA



VINNUSTOFA FYRIR KENNARA Á UNGLINGASTIGI

Á námstefnu Flatar sem haldin var vorið 2021 voru haldnar vinnustofur þar sem starfandi kennarar deildu með þátttakendum hugmyndum af vinnu sem byggir á hæfniviðmiðum. Í unglingadeild Salaskóla er lögð áhersla á ýmiss konar samvinnu- og þemaverkefni í stærðfræði. Þær Heiða Lind Heimisdóttir og Ragnheiður Magnúsdóttir sögðu frá vel heppnuðu verkefni um föll sem þær unnu með nemendum í 9. bekk. Tilgangurinn var að skerpa á námsþáttum og hugtökum og að gera tilraun til að auka áhuga nemenda á viðfangsefninu.

HÆFNIVIÐMIÐIN SEM LÖGÐ VORU TIL GRUNDVALLAR Í VERKEFNINU

Að nemendur geti:

- sett fram og notað mismunandi framsetningu sama fyrirbæris, hvort sem um er að ræða hlutbundna, myndræna, munnlega eða algebrulega framsetningu eða með töflu og grafi
- unnið í samvinnu við aðra að lausnum stórra og smárra stærðfræðiverkefna og gefið öðrum viðbrögð, m.a. með því að spyrja markvisst
- unnið með og einfaldað algebrustæður
- lýst sambandi breytistærða með föllum
- túlkað jöfnur í hnitakerfi og notað teikningar í hnitakerfi til að leysa þær

VINNAN

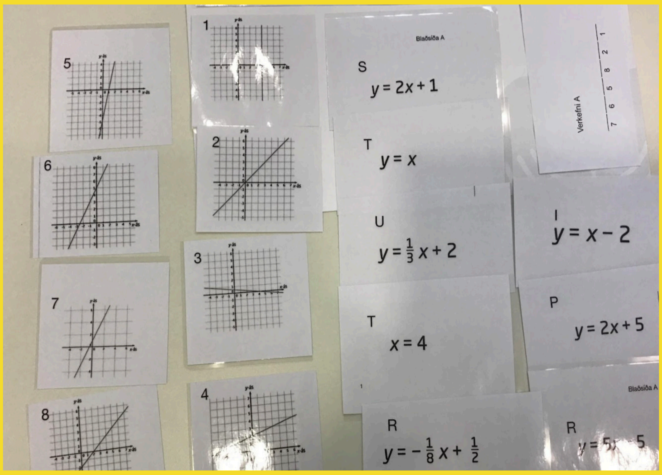
Nemendum var skipt í þriggja manna hópa og lögð voru fyrir níu verkefni. Kennararnir höfðu útbúið níu umslög sem innihéldu verkefnin sem voru á plöstuðum spjöldum. Þegar hópur hafði lokið við að vinna verkefnin í einu umslagi skiluðu þeir þeim í þar til gerðan kassa og fengu næsta umslag. Þannig unnu allir hóparnir öll verkefnin, í þeirri röð og á þeim hraða sem hentaði hverjum og einum.

NÁMSMAT

Í umslaginu var lausnarblað fyrir verkefnin sem nemendur fylltu út og þannig gátu kennarar farið yfir og metið á fljótlegan hátt. Einnig fylgdust kennarar með vinnu nemenda og lögðu mat á samvinnu og umræður.

NIÐURSTAÐA

Í ljós kom að þetta verkefni hentaði nemendum vel. Þeir voru glaðir og jákvæðir og sýndu verkefninu áhuga. Verkefnið bauð upp á sveigjanleika og tækifæri til samskipta þar sem mismunandi styrkleikar hvers og eins fengu að njóta sín. Nemendur gátu hreyft sig um stofuna er þeir skiptu um verkefni, verið í samskiptum við félaga sína og unnið á eigin hraða. Jákvætt andrúmsloft skapaðist á vinnusvæðinu og í ljós kom að í samræðum sín á milli notuðu nemendur óspart hugtökin sem unnið var með.



DÆMI UM VERKEFNI

Stöð 1

- Para saman línur og jöfnur.
- Þið eigið að para saman línu og jöfnu og finna þannig lausnarorðið.

Kristín Einarsdóttir
kennari í Salaskóla

VINNUSTOFA FYRIR KENNARA Í FRAMHALDSSKÓLUM

Í vinnustofu Valgarðs Más Jakobssonar fengum við þátttakendur vinnustofunnar að kynnast því hvernig unnið er með hæfniviðmiðin í stærðfræði í FMOS. Til dæmis að nemendur skrái lausnir skipulega, skiptist á skoðunum um lausnir við aðra, útskýri hugmyndir fyrir öðrum, skilji merkingu og tengsl hugtaka og vinni með þau. Til að ná þessum markmiðum notar Valgarð sér í lagi fjögur verkfæri sem reynast honum vel. Þau eru Desmos, GeoGebra classroom, Thinking Classroom og Mathshell vefurinn. Allt eru þetta mjög öflug verkfæri. Það síðastnefnda inniheldur mikið magn af verðugum verkefnum sem byggja upp skilning nemenda á ákveðnum þáttum stærðfræðinnar gegnum þrautalausnir í hópvinnu. Með þeim eru ítarlegar leiðbeiningar og rökstuðningur fyrir kennara.

Í FMOS hafa verið settar hvítar filmur á veggina í stærðfræðistofunum sem virka sem litlar töflur og henta vel í Thinking Classroom vinnu. Mörg verkefnanna í Mathshell passa mjög vel í Thinking Classroom og kennarar prófuðu einnig að vinna með Thinking Classroom í gegnum gagnvirkar töflur (t.d. Microsoft Whiteboard) þar sem hægt er að skilgreina rými fyrir hvern hóp en síðan geta nemendur „labbað um“ og skoðað vinnu annarra hópa. Við skoðuðum saman Desmos og GeoGebra Classroom. Hvort tveggja gerir nemendum kleift að skrá sig inn í kerfið og vinna saman með stærðfræðilegar hugmyndir sem kennarinn hefur sett fram. Kennarinn getur svo fylgst með því sem nemendur gera á eigin tölvu. Þar hafa nemendur tækifæri til að orða hugmyndir sínar, svara spurningum og móta hugtakaskilning í samvinnu við aðra nemendur. Þetta er líka svolítið eins og leikur fyrir nemendur, mjög skemmtilegt. Valgarð notaði forritin óspart í fjarnáminu (vegna Covid) og fannst þetta frábær leið til að halda uppi hópvinnu og virkni þegar nemendur áttu ekki kost á að hittast í skólanum. Það kom einnig í ljós að með því að nota Desmos, fékk Valgarð viðbrögð frá mun fleiri nemendum í umræðum heldur en í hefðbundnum umræðum í staðkennslu. Því hefur hann notað þetta meira í kennslustofunni, þrátt fyrir að ekki þurfi að vera í fjarkennslu lengur. Valgarð segir; „það er hægt að setja allt þarna inn“. Þetta hljómar allt mjög einfalt í hans meðförum.

Við sem sóttum vinnustofuna vorum svakalega spennt fyrir Desmos og myndum gjarnan vilja fara á sumarnámskeið í nokkra daga þar sem við búum til skemmtileg verkefni fyrir nemendur sem uppfylla tjáningar- og tungumálamarkmiðin auk þess að auka skilning nemenda á stærðfræðilegum hugtökum í samvinnu við bekkjarfélagana.

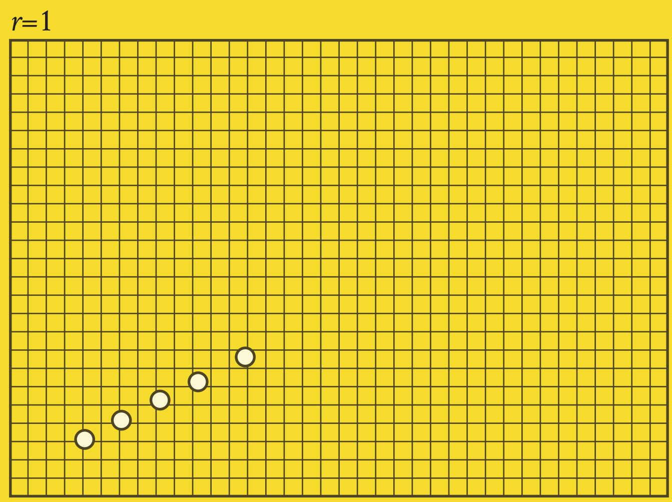
Guðbjörg Helga Guðmundsdóttir
Fjölbrautaskóla Suðurlands

VERKEFNI

FYLGNIFYRIBÆRIÐ KANNAÐ

Þetta er dæmi um GeoGebra classroom verkefni þar sem nemendur fá tilfinningu fyrir fylgnistuðlinum r.

Dragðu punktana til með músinni og athugið hvaða áhrif það hefur á r. Reynið að raða punktunum þannig að r verði sem stærst.



HUGSANDI SKÓLASTOFA

Sú staðreynd að skólastofur víðsvegar um heiminn líta nokkurn veginn eins út er áhugavert en þó á sama hátt ekki óvænt. Í sérhverri skólastofu er kennari sem hefur það hlutverk að miðla þekkingu sinni til hóps nemenda sem sitja við borð með námsefni fyrir framan sig. Starf kennarans felst því mikið í því að búa til skilyrði til þess að miðlun nýrrar þekkingar fari fram á meðan hlutverk nemenda er þá að taka á móti þessari þekkingu. Nemendur þurfa þó að vera virkir gagnvart miðlun þekkingar þannig að nám fari fram. Með öðrum orðum mætti einfaldlega segja að nám mun ekki fara fram nema að nemendur hugsi! Þegar hugsun nemenda er sett í brennidepil hljóta kennsluhættir að þurfa að taka mið af því og taka jafnvel breytingum þannig að hægt sé að styðja við og viðhalda hugsun nemenda í skólastofunni.

Það var árið 2019 sem ég fyrst heyrði um kennslunálgunina Hugsandi skólastofu. Þá var ég meistaranemi við Menntavísindasvið Háskóla Ísland og las fræðigreinar um stærðfræðikennslu í áfanga Ingólfs Gíslasonar, *Rannsóknir á sviði stærðfræðimenntunar – stærðfræðikennarinn.* Fræðigreinar um hugsandi skólastofu heilluðu mig frá fyrstu stundu en í rannsóknum og skrifum Peters Liljedahls fann ég svör við ýmsum spurningum sem höfðu vaknað hjá mér í tengslum við stærðfræðikennslu og -nám. Sumarið 2019 tók ég síðan þátt í vinnustofu Liljedahls sem haldin var í húsnæði Menntavísindasviðs HÍ. Þar fékk ég að kynnast nálguninni á eigin skinni sem var dýrmæt reynsla fyrir mig í starfi mínu sem stærðfræðikennari á unglingastigi.

Umfjöllun um vinnustofuna er hægt að finna í 1. tbl. Flatarmála frá árinu 2019 (https://www.ki.is/media/t2pp11hj/flatarmal_2019_1tbl.pdf) en í 1. tbl. Flatarmála frá árinu 2018 (https://www.ki.is/media/rzfdrri3/flatarmal_2018_1tbl.pdf) er einnig hægt að finna umfjöllun Ingólfs Gíslasonar á nálguninni í grein sem hann kallar *Hvatt til hugsunar í stærðfræði.* Áhugasamir geta einnig kynnt sér kennslunálgunina í meistaraverkefni mínu: *Kennslunálgunin hugsandi skólastofa: Starfendarannsókn á þrautalausnum í stærðfræðikennslu.*

Í sinni einföldustu mynd mætti skilgreina hugsandi skólastofur sem rými með hugsandi einstaklingum sem hugsa í sameiningu, læra hver af öðrum og byggja upp þekkingu og skilning í gegnum verkefni og umræður. Í því rými hlúa kennarar ekki einungis að hugsun heldur gera einnig ráð fyrir henni, bæði óbeint og beint. Í rannsóknum Liljedahls er sjónum beint að því að finna þau atriði í kennslu sem hlúa að, viðhalda eða hindra hugsandi skólastofur (Liljedahl, 2016). Í heildina hefur Liljedahl tekið saman fjórtán atriði sem hann telur mikilvægt að kennarar innleiði í sína kennslu til þess að skapa rými fyrir hugsun nemenda og kennara. Það sem hvað helst einkennir hugsandi skólastofur er vinnusvæði nemenda í stofunni en nemendur vinna

Nemendur fylgjast með og ræða saman í upphafi verkefnis.

verkefnin á lóðrétta fleti sem auðvelt er að stroka út af (svo sem tússtöflur, krítartöflur eða glugga). Nemendur vinna saman að verkefnum í tveggja til þriggja manna slembivöldum hópum en hver og einn hópur fær einn penna eða eina krít. Á meðan nemendur vinna að verkefnum gengur kennarinn um stofuna og fylgist með vinnu hópanna. Kennari hlustar á allar spurningar en svarar þó aðeins þeim spurningum sem leiða til áframhaldandi hugsunar. Hann gefur síðan vísbendingar og viðbætur við verkefnið, þannig að það sé hæfileg áskorun fyrir alla nemendur. Þegar allir hóparnir hafa náð þeim lágmarksþröskuldi sem kennari setti sem markmið í tímanum safnar hann nemendum saman til að fara yfir og draga saman vinnu þeirra. Best er að byrja á þeim stað þar sem allir nemendurnir í stofunni geta verið þátttakendur.

> *„Ef við viljum að nemendur hugsi þurfum við að gefa þeim eitthvað til þess að hugsa um. Í stærðfræði kemur það í formi verkefna. En ekki bara eitthvert verkefni, heldur þarf það að vera verkefni sem krefst hugsunar." Peter Liljedahl*

VERKEFNI Í HUGSANDI SKÓLASTOFU

Þegar unnið er að því að innleiða hugmyndir hugsandi skólastofu er mikilvægt að byrja á því að nota verðug þrautalausnar verkefni sem er ótengt því námsefni sem liggur fyrir. Ég hef yfirleitt nýtt fyrstu vikurnar á skólaárinu til þess að kynna nemendum þessa nálgun og hef þá skipt nemendum í nýja hópa í hverjum tíma þar sem þeir takast á við um það bil eitt verkefni í tímanum. Á heimasíðu Liljedahls (https://www.peterliljedahl.com/teachers/good-problem) er hægt að finna safn af verkefnum sem henta vel í þessa upphafsvinnu nemenda. Eitt dæmi um verkefni sem ég hef notað sjálf með nemendum er skattheimtumaðurinn.

SKATTHEIMTUMAÐURINN

Verkefnið er unnið svona:

Við byrjum með nokkur umslög en í hverju umslagi eru peningar, frá 1 kr. upp í 12 kr. Í fyrsta er 1 kr., í næsta er 2 kr. og svo framvegis þangað til að við erum komin með 12 umslög. Þessi umslög má til dæmis teikna á töfluna. Þú (leikmaður) mátt velja hvaða umslag sem er til þess að eiga. Þegar þú hefur valið kemur skattheimtumaðurinn og tekur öll umslög sem innihalda upphæðir sem eru þættir í upphæðinni sem þú tókst. Skattheimtumaðurinn verður að geta tekið að minnsta kosti eitt umslag í hvert skipti sem þú tekur umslag. Ef umslögin sem eftir eru innihalda ósamþátta upphæðir þá getur þú ekki tekið fleiri umslög heldur er leikurinn búinn og skattheimtumaðurinn tekur öll umslögin sem eru eftir. Markmiðið er að eignast hærri upphæð en skattheimtumaðurinn og þá telst leikmaður vinna skattheimtumanninn.

Dæmi:

Fyrsta lota: Þú tekur 8 kr. Skattheimtumaðurinn fær 1 kr., 2 kr. og 4 kr.

Önnur lota: Þú tekur 12 kr. Skattheimtumaðurinn fær 3 kr. og 6 kr.

(Hinir þættir 12 hafa nú þegar verið teknir).

Þriðja lota: Þú tekur 10 kr. Skattheimtumaðurinn fær 5 kr.

Þá eru einungis ósamþátta upphæðir eftir svo þú getur ekkert gert meira heldur er leikurinn búinn og þar með fær skattheimtumaðurinn umslögin sem eru eftir: 7 kr., 9 kr. og 11 kr.

Heildarupphæð:

Þú: 8 kr. + 12 kr. + 10 kr. = 30 kr.

Skattheimtumaðurinn: 1 kr. + 2 kr. + 3 kr. + 4 kr. + 5 kr. + 6 kr. + 7 kr. + 9 kr. + 11 kr. = 48 kr.

Spurningar:

Er mögulegt að vinna skattheimtumanninn í þessum 1 – 12 kr. leik, þ.e. að fá hærri upphæð en hann? Ef svo er, hvernig?

Hver er hæsta upphæðin sem þú getur fengið?

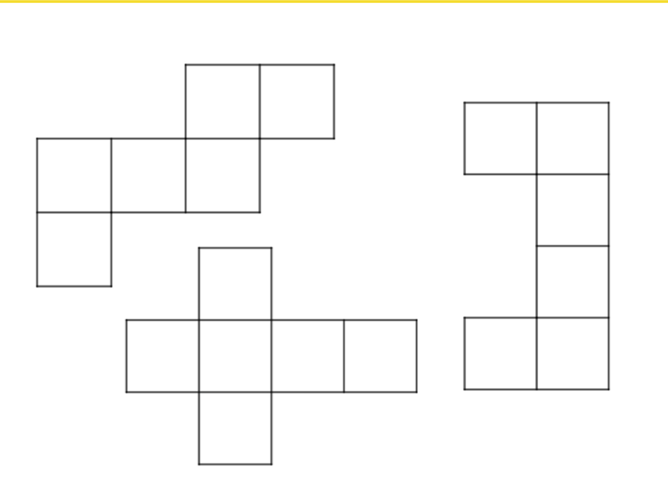
Útvíkkun eða viðbót: Hvað ef þú spilaðir leikinn með umslögum sem innihalda 1 krónu upp í 24 krónur? Hvað með 1 krónu upp í 48 krónur?

VERKEFNI TENGD NÁMSKRÁ

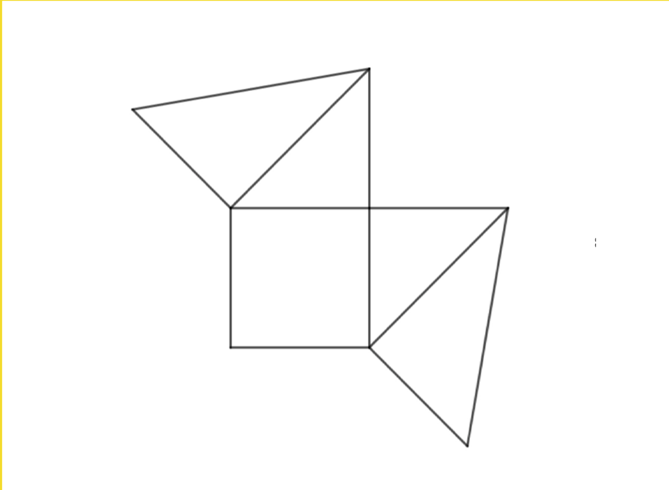
Í almennri kennslu minni nýti ég mér aðferðir hugsandi skólastofu um það bil einu sinni til tvisvar í viku en verkefnin sem ég legg fyrir eru þá tengd því námsefni sem við erum að vinna með í hvert skipti. Með því að nota þessa aðferð hef ég fundið leið til að kveikja áhuga nemenda á námsefninu strax frá upphafi og þannig fæ ég einnig góða innsýn inn í fyrri þekkingu þeirra á efninu. Aðferðin nýtist mér vel til þess að viðhalda áhuga nemenda á efninu með því brjóta upp kennsluna og skapa umræður. Einnig gefur þetta mér mjög gott tækifæri til að athuga skilning þeirra á námsefninu. Eftir því sem ég vinn oftar á þennan hátt hef ég séð að verkefnin þurfa ekkert endilega að vera þrautalausnar verkefni. Ef vel hefur gengið að innleiða nálgunina er nóg fyrir hópana að verkefnið fái þau til að hugsa og ræða saman og það gera þau sérstaklega þegar nemendur hafa ekki séð svipað verkefni áður.

ÞRÍVÍÐ RÚMFRÆÐIFORM

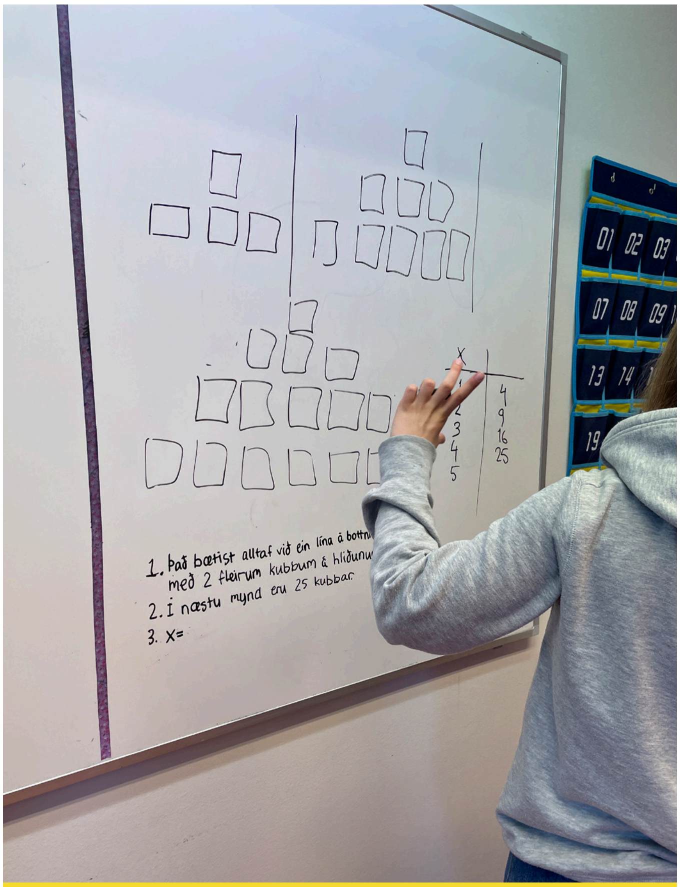
Þetta verkefni kemur úr bókinni Developing thinking in Geometry (2005). Í þessu verkefni fær hver hópur eitt blað með þremur formum á. Ég bið nemendur um að athuga hvort þeir geti búið til þrívítt rúmfræðiform úr hverju einu af þessum formum. Ég gef þeim ekki meiri upplýsingar en yfirleitt spyrja þeir hvort það megi klippa þau út sem þeir fá leyfi til. Þegar þeir hafa skoðað þessi form í einhvern tíma spyr ég hver af þeim urðu að þrívíðu rúmfræðiformi og hvaða form það sé. Þarna gefst mér tækifæri til að koma að orðinu teningur og ræða um orðið kassi og hvers vegna það er ekki heppilegt að nota það í tengslum við rúmfræði. Síðan bið ég þá um að komast að því hvað yfirborðsflatarmálið sé á teningnum. Þeir sem komast lengst fá seinna blaðið og ég gef þeim sömu fyrirmæli það er að finna hvaða þrívíða form verður til úr þessu formi og hvert yfirborðsflatarmál þess sé.



Hver af þessum formum búa til tening?



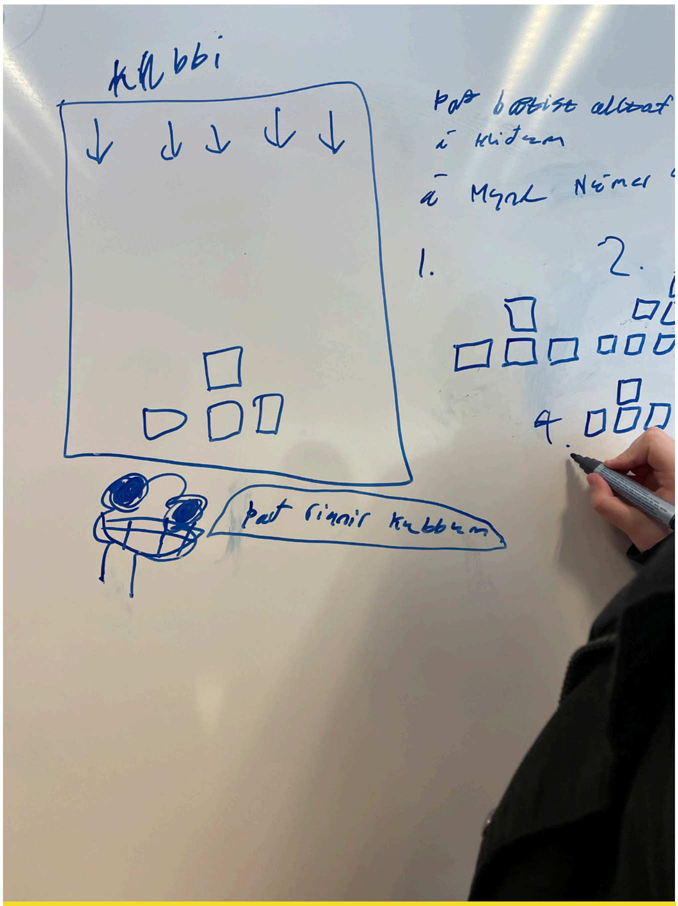
Hvaða þrívíða form er þetta?



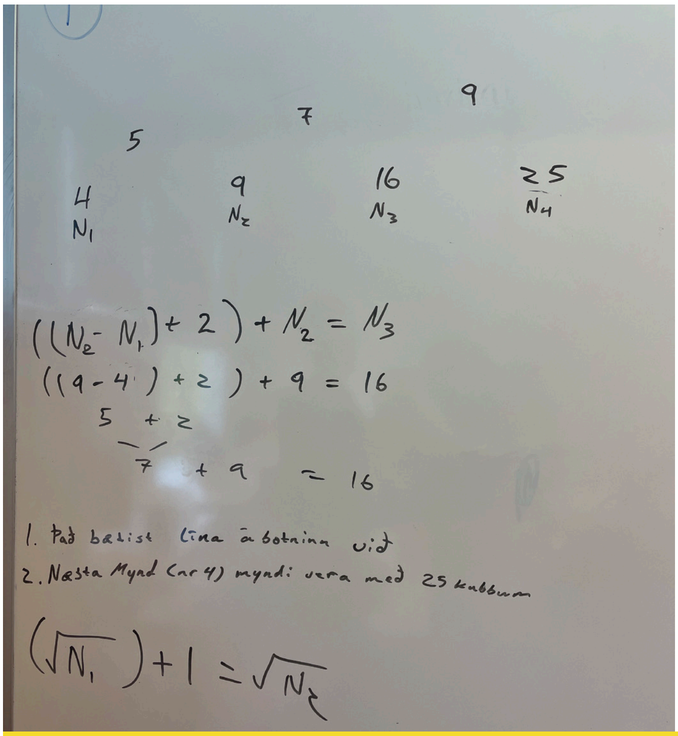
Spáð í mynstur

ÁHRIF HUGSANDI SKÓLASTOFU Á KENNSLUNA MÍNA

Þegar ég innleiddi þessa kennsluhætti í mína kennslu var áhugavert að fylgjast með hvernig hún hafði áhrif á vinnu nemenda í tímum. Til að byrja með eru þeir fljótari að koma sér að verki og taka einnig virkari þátt alla kennslustundina. Þeir eru oft hikandi fyrst að kíkja á töflurnar hjá öðrum en eftir smá hvatningu sameinast hóparnir oft í umræðum um verkefnin. Þeir verða síðan betri í að vinna með hverjum sem er og eyða minni og minni tíma í að reyna að finna leiðir til að vinna með vinum sínum. Í þessum aðstæðum skapast lítið svigrúm fyrir nemendur til þess að draga sig í hlé og taka ekki þátt vegna þess að þeir geta ekki falið sig á bak við bækurnar sínar. Kennslunálgunin hefur þannig gefið mér tækifæri til þess að búa til skólastofu þar sem hlutverk nemenda er að taka þátt, vinna saman í hópum, ræða saman og hugsa í sameiningu um verkefni. Þannig hef ég getað gert kennsluna mína áhugaverðari og fjölbreyttari fyrir mig og nemendur mína ásamt því að geta mætt nemendum betur þar sem þeir eru staddir með því að hlusta meira á þá og þeirra hugmyndir.



Það rignir kubbum



Hér voru hugmyndir að kvikna um hvort hægt væri að gera almenna formúlu fyrir mynstur.

Áslaug Dóra Einarsdóttir
kennari í Laugalækjarskóla

Heimildaskrá:

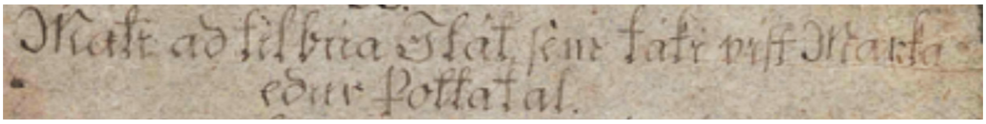
Liljedahl, P. (2016). Building thinking classrooms: Conditions for problem-solving. *Posing and Solving Mathematical Problems* (bls. 361-386): Springer

Johnston-Wilder, S. og Mason, J. (2005). *Developing Thinking in Geometry*. London: Paul Chapman Publishing.

AÐFERÐIR VIÐ AÐ MÆLA OG SMÍÐA KRINGLÓTT KER

Upphaf 19. aldar var dauflegur tími á Íslandi. Þjóðin var að jafna sig eftir Móðuharðindin. Höfuðstaðir landsins, biskupssetrin og skólarnir í Skálholti og á Hólum, höfðu verið lögð niður og flutt til Reykjavíkur. Veturinn 1804–1805 var enginn skóli í landinu. Danska ríkið var á barmi gjaldþrots í kjölfar Napóleonsstyrjalda. Reikningsmennt lá að mestu í láginni þar til Björn Gunnlaugsson var ráðinn að Bessastaðaskóla árið 1822.

Það kemur því á óvart að finna 24 blaðsíðna frásögn af rúmmálsreikningum frá þessum tíma í handritinu ÍB 169 4to, tímasett á árabilinu 1790-1836. Tilgangur frásagnarinnar er að kynna aðferð við að mæla ílát og finna hve mikið þau taka. Höfundur nefnir frásögnina *Máti að tilbúa Ílát, sem taki visst Marka eður Pottatal.*


Máti að tilbúa Ílát, sem taki visst Marka eður Pottatal.

Frásögnin ber vott um góða þekkingu í stærðfræði, meiri en kennd var í Hólavallaskóla 1786–1804 og í Bessastaðaskóla 1805–1822. Barnaskólar voru enn ekki til. Við nánari skoðun kemur í ljós að sami texti birtist í tímaritinu *Ármann á Alþingi*, 4. árgangi, 1832, eftir Guðmund Jónsson (1763–1836), prest á Staðastað á Snæfellsnesi. Guðmundur brautskráðist sem stúdent frá Skálholtsskóla árið 1781 og var um skeið skrifari Hannesar Finnssonar biskups. Spurningin er hvar séra Guðmundur aflaði sér stærðfræðiþekkingar. Hann gæti hafa kynnst reikningum á borð við þessa í Skálholti. Námsefnið var ekki staðlað heldur fór eftir kunnáttu og áhuga kennaranna. Guðmundur lærði hjá Bjarna Jónssyni rektor (1725–1798) sem numið hafði við Hafnarháskóla í tvö ár og þótti snjall kennari. Prestar voru næstum eina stéttin sem hafði hlotið einhvers konar skólamenntun. Margir þeirra héldu áfram að sanka að sér fróðleik efir skólagöngu, til dæmis með því að panta bækur frá útlöndum.

Enn voru óliðnir áratugir þar til metrakerfið yrði tekið upp á Íslandi, árið 1910. Lengdir voru mældar í fetum og þumlungum en rúmmál í pottum og mörkum. Einn pottur var 54 rúmþumlungar, en ein mörk var hálfur pottur, 27 rúmþumlungar.

Höfundur handritsins þekkti hlutfallið milli ummáls og þvermáls hrings, þótt hann nefndi ekki heitið pí, og sagði það vera 3,141592... , eða eins og 355 á móti 113. Líka mætti nota 22 á móti 7 þegar ekki væri krafist því meiri nákvæmni.

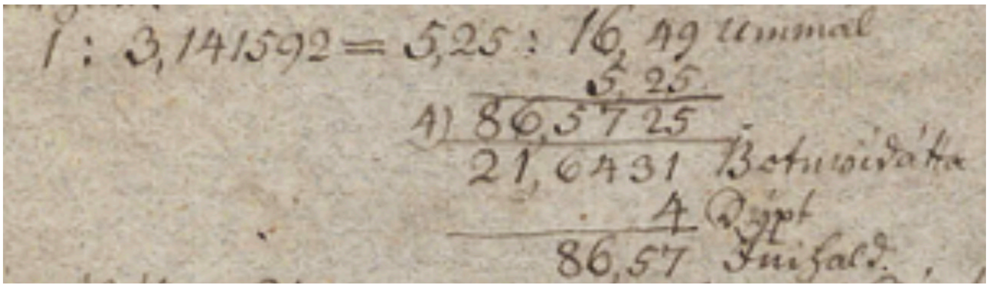
Ummál hrings var reiknað út frá þvermáli með hlutfallareikningi, þannig:

$$1 : 3{,}141592... = \text{þvermál} : \text{ummál}$$

Flatarmál hringsins nefndi höfundur *víðáttu*, í tilviki dæmis sem hann tók, *botnvíðáttu* kringlótts kers. Hann sagði að ummálið skyldi margfalda með einum fjórða hluta þvermálsins til að finna víðáttuna. Þetta má rökstyðja þannig:

$$\text{Víðátta} = \frac{\text{ummál} \cdot \text{þvermál}}{4} = \frac{\text{ummál}}{\text{þvermál}} \cdot \frac{\text{þvermál}}{2} \cdot \frac{\text{þvermál}}{2} = \pi \cdot r \cdot r$$

Höfundur tók síðan dæmi af keri með þvermálið 5¼ þumlungar. Við reikningana kaus hann að nota tugabrot sem voru ekki enn orðin algeng á ritunartíma handritsins. Hann reiknaði ummálið, margfaldaði það með þvermálinu og deildi með 4 til að finna botnvíðáttuna. Svo margfaldaði hann með dýpt kersins, 4 þumlungum, til að finna rúmmál þess, sem hann nefndi *innihald*, í rúmþumlungum.

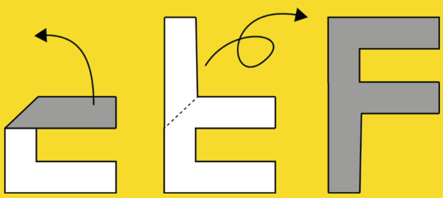


Eins og sjá má á myndinni er rúmmálið 86,57 rúmþumlungar. Það er rétt um 3,2 merkur, eða rúmur einn og hálfur pottur sem kerið tekur.

Það getur verið þægileg leið til að slá á rúmmál sívalra kerja að mæla þvermál, ummál og hæð og sleppa við að þurfa að reikna með pí.

Kristín Bjarnadóttir
prófessor emerita við Háskóla Íslands

LAUSN VIÐ ÞRAUT Á BLS 3



HLJÓÐLAUS MYNDBÖND OG TALSETNINGAR NEMENDA

NÝSTÁRLEG VERKEFNI Í STÆRÐFRÆÐI

Þessi grein segir frá hljóðlausum myndböndum – hvað þau eru, hvernig megi nýta þau við leiðsagnarmat í stærðfræði, hvernig þau eru búin til og hvernig hugmyndin um þau kviknaði. Greinin byggir á niðurstöðum doktorsverkefnis höfundar sem fjallaði um hönnun og þróun hljóðlausra myndbandsverkefna.

HVAÐ ER HLJÓÐLAUST MYNDBAND?

Hljóðlaus myndbönd eru stuttar teiknimyndir (ein til tvær mínútur að lengd) sem sýna stærðfræði á kvikan hátt, án orða eða texta, án hljóðs eða tónlistar. Hvert myndband hefur visst stærðfræðilegt hugtak í forgrunni og býður upp á mismunandi möguleika til talsetningar. Dæmi um slík myndbönd má sjá á vefsíðunni youtube.com/beamia

Það er ekki hægt að gera hljóðlaust myndband um hvaða stærðfræðihugtak sem er. Hugtakið þarf að vera þannig að hægt sé að setja það fram án texta á myndrænan hátt, til dæmis með aðstoð GeoGebru eða álíka hugbúnaðar. Dæmi um umfjöllunarefni myndbandanna eru m.a. eiginleikar hnitakerfisins, hallatala eða jafna beinnar línu, eiginleikar falla af ýmsu tagi, aðfellur og hornaföll. Algengt er að umfjöllunarefnið sé á sviði rúmfræði, hnitarúmfræði eða stærðfræðigreiningar.

Þegar unnið er með hljóðlaust myndband í kennslustofunni þá fá nemendur það hlutverk að undirbúa og taka upp talsetningu við myndbandið. Nemendur vinna saman í tveggja manna hópum og þurfa því ekki einungis að hugsa um hvernig þau vilji haga sinni talsetningu heldur einnig ræða við hópfélaga sinn um myndbandið og innihald þess. Hljóðlaus myndbönd eru því gott tæki til náms fyrir nemendur. Kennari getur nýtt sér hljóðlaust myndband sem tæki til að meta hugtakaskilning nemenda. Verkefni byggð á myndböndunum henta vel við leiðsagnarmat og námsmat almennt.

NOTKUN HLJÓÐLAUSRA MYNDBANDA Í STÆRÐFRÆÐIKENNSLU – AÐFERÐIR VIÐ FYRIRLÖGN

Markmiðið með talsetningarverkefnum sem byggja á hljóðlausum myndböndum er að fá nemendur til að orða hugsanir sínar tengdar myndbandinu, að ræða saman og komast að niðurstöðu um hvernig talsetningin skuli vera. Í framhaldinu er síðan markmiðið að tengja talsetningar nemenda við stærðfræðihugtök og eiginleika þeirra í samræðum alls nemendahópsins.

KYNNING

Kennari kynnir myndbandið fyrir öllum nemendahópnum með því að varpa því á tjald. Ef nemendur hafa aldrei unnið slík verkefnið áður þá getur verið að einhver geri athugasemd um að hljóðið vanti. Þetta er gott tækifæri fyrir kennara til að segja: „Já, það er rétt hjá ykkur, það vantar hljóðið, en það verður einmitt hlutverk ykkar að talsetja þetta myndband!“. Þegar nemendur horfa á myndbandið í fyrsta skipti geta þau hugsað innra með sjálfum sér um það sem myndbandið sýnir. Því næst fá þau tækifæri til að orða hugsanir sínar í samræðu við hópfélaga meðan þau horfa á myndbandið eins oft og þau vilja.

UNDIRBÚNINGUR TALSETNINGAR

Kennari notar sýnilega slembi aðferð (til dæmis spilastokk) við að skipta nemendum í tveggja manna hópa sem geta horft á myndbandið eins oft og best hentar. Meðan á þessu endurtekna áhorfi stendur geta nemendur rætt við félaga sinn um hvernig þau vilji talsetja myndbandið. Sum gætu jafnvel viljað skrifa stutt handrit, til dæmis sem riss á töflu eða texta í vinnubók til að undirbúa upptöku.

UPPTAKA TALSETNINGAR

Kennari gætir þess frá upphafi að nemendur viti að talsetning þeirra gæti gagnast öðrum nemendum til að skilja eða átta sig á stærðfræðinni sem sést í myndbandinu. Það er jú aldrei að vita nema orðalag þeirra geti hjálpað til við að brúa bilið milli daglegs máls og tungumáls stærðfræðinnar.

Nemendur nota síma, diktafón, hljóðnema og tölvu eða aðra tækni til að taka upp talsetningu sína og að sjálfsögðu er hægt að taka upp aftur ef eitthvað misferst.

HÓPUMRÆÐUR

Þegar allar skrár með upptöku hafa borist kennara er hægt að hlusta og horfa á myndbandið samtímis. Sumir nemendur hafa jafnvel tekið upp bæði mynd og hljóð saman með því að nota Screencastify eða álíka hugbúnað. Í kjölfar hverrar spilunar er hægt að ræða um talsetninguna og algengar spurningar sem vakna geta verið:

„Hvað haldið þið að þau hafi átt við með…?“

„Ef þið lokið augunum og teiknið eftir því sem þið heyrið, hverju takið þið eftir?“

„Ef ég loka augunum og teikna eftir því sem við heyrum, þá myndi ég gera svona… hverju takið þið eftir?“

„Tókuð þið eftir hvernig hópurinn áðan notaði … til að lýsa … en hópurinn núna notaði … til að lýsa … Hvað segið þið? Er þetta alveg sambærilegt? Er það alltaf, stundum eða aldrei sambærilegt?“

„Detta ykkur í hug fleiri orð heldur en… til að lýsa…?“

„Er eitthvað fleira sem þið takið eftir?“

„Hverju mynduð þið vilja breyta? Af hverju?“

UNDIRBÚNINGUR FYRIR NÆSTU SKREF Í KENNSLU

Eftir kennslustund getur kennari hlustað aftur á talsetningar nemenda, ígrundað það sem fram kom í umræðunum og fleira sem kann að skjóta upp kollinum við endurhlustun. Í framhaldinu er síðan hægt að skrifa endurgjöf ef á þarf að halda og undirbúa næstu skref kennslunnar. Til dæmis er mikilvægt að skoða vel ef komið hefur í ljós að hugmyndir nemenda stangast á við það sem fram kom í tímum hingað til, það er að segja, ef um einhvers konar misskilning er að ræða.

NOTKUN HLJÓÐLAUSRA MYNDBANDA Í STÆRÐFRÆÐIKENNSLU – LEIÐSAGNARMAT OG AÐFERÐIR HUGSANDI SKÓLASTOFU

Endurgjöf fylgir í beinu framhaldi af því að nemendur vinna verkefnin. Þau virka sem hvati til umræðna og talsetningar nemenda opna leið til að ræða hugmyndir nemenda um námsefnið og til að kynnast mismunandi leiðum samnemenda við að lýsa stærðfræðinni sem fyrir kemur í myndbandinu. Oft opnar þetta augu kennara fyrir ýmiss konar hindrunum – misskilningi eða ónákvæmni sem annars hefði verið hulin og því ekki mögulegt að ræða um.

Líkt og sjá má af þessu þá geta hljóðlaus myndbandsverkefni gagnast við leiðsagnarmat, en námsmat gagnast til leiðsagnar samkvæmt Wiliam (2011, bls. 43) þegar upplýsingar um stöðu nemenda eru dregnar fram, túlkaðar og nýttar af kennurum, nemendum og/eða samnemendum til að taka ákvarðanir um næstu skref í námi og kennslu. Slíkar ákvarðanir eru líklegar til að vera betri eða betur ígrundaðar heldur en ákvarðanir sem annars hefðu verið teknar án vitneskjunnar sem námsmatið færir.

Í ljós kom að viss atriði hugsandi skólastofu (Liljedahl, 2020; Ingólfur Gíslason og Bjarnheiður Kristinsdóttir, 2018) komu að gagni við fyrirlögn hljóðlausra myndbandsverkefna:

- Að setja verkefni fyrir munnlega og gefa stutt fyrirmæli
- Að skipta nemendum í hópa á sýnilega tilviljunarkenndan máta
- Að nemendur geti notað töflur eða glugga til að skrá hugmyndir meðan þau ræða saman við undirbúning sinnar talsetningar
- Að halda verkefninu opnu og svara einungis spurningum nemenda ef svarið einkennist af því að það styður nemendur til að geta haldið áfram að hugsa sjálfstætt um verkefnið (leiðir ekki til þess að nemendur hætti að hugsa)
- Að leiða samræður byggðar á framlagi nemenda og veita leiðsagnarmat

TALSETNINGAR NEMENDA - TIL HVERS?

Verkefni þar sem nemendur taka upp talsetningu við hljóðlaus myndbönd geta gefið nemendum tækifæri til að ræða saman um stærðfræði. Með því að hlusta á talsetningar hvers annars geta augu nemenda opnast fyrir því að til eru margar leiðir til að útskýra stærðfræðileg fyrirbæri og að það getur verið gagnlegt að heyra útskýringar samnemenda – til dæmis til að brúa bilið milli daglegs og stærðfræðilegs máls. Meðan á gerð talsetningar stendur getur verið að nemendur átti sig á stöðu eigin skilnings; ef nemandi á erfitt með að útskýra eitthvað þá er mögulegt að viðkomandi geti áttað sig á að eitthvað vantar upp á skilning á viðkomandi atriði. Kennarar fá með talsetningum nemenda upp í hendurnar grunn fyrir umræður um stærðfræðileg hugtök. Upptökurnar geta opnað eyru kennara fyrir því hvernig nemendur hugsa um námsefnið og það gerist nánast undantekningarlaust að einhver talsetning nemenda kemur kennara á óvart. Við umræðurnar sem byggja á talsetningum nemenda skapast tækifæri til að nálgast sameiginlegan skilning á umfjöllunarefni myndbandsins.

GERÐ NÝRRA HLJÓÐLAUSRA MYNDBANDA - AÐFERÐIR VIÐ UPPTÖKU HLJÓÐLAUSRA MYNDBANDA

Ef þú ert með hugmynd að hljóðlausu myndbandi þá er velkomið að hafa samband við Bjarnheiði (bjarnhek@hi.is) og hver veit nema hún geti bætt í sarpinn fleiri myndböndum í samstarfi við þig.

Það er að ýmsu að hyggja þegar hljóðlaust myndband er búið til. Eftirfarandi atriði eru meðal þess sem gæta þarf að við gerð myndbandsins:

- Sleppa tali og tónum
- Gera ráð fyrir talsetningu (hafa hraðann ekki of hægan en þó nægilega hægan til að nemendur geti komið talsetningu sinni fyrir)
- Nota milda liti og helst þannig að þeir séu andstæðir hver öðrum í litahring (upp á skýrleika að gera) og taka tillit til litblindu (skoða til dæmis litaskala sem henta litblindum)
- Gæta þess að hlutir sjáist vel, t.d. að strik séu nægilega breið og punktar nægilega stórir
- Sleppa táknum og bókstöfum nema slíkar merkingar hluta séu nauðsyn til að hægt sé að gera grein fyrir tveimur eða fleiri samskonar hlutum sem fyrir koma í myndbandinu
- Hafa myndbandið um 1 mínútu að lengd en þó ekki lengra en 2 mínútur
    - Þegar um er að ræða eitt ákveðið og vel afmarkað viðfangsefni þá ættu ein til tvær mínútur að duga til að sýna það á kvikan hátt.
    - Ef 30 nemendur mæta til þátttöku og skipt er í pör þá tekur það um 20 mínútur að spila og hlusta á talsetningar þeirra allra. Með umræðum sem spinnast í kringum talsetningarnar geta þetta orðið 40-60 mínútur af kennslustundinni, allt eftir því hversu margar talsetningar valið er að hlusta á.

Tæknileg útfærsla getur líka verið margs konar. Til dæmis má nýta GeoGebru eða álíka forrit til að vinna grunn að myndbandi og eru þá rennistikur nýttar til að ná fram hreyfingu. Einnig geta Processing, Java og fleiri forritunarmál nýst til að útbúa myndbandsgrunn. Skjáupptöku má gera með forriti á borð við Xbox GameBar, ScreenCast'o'Matic eða Screencastify og hægt er að klippa og stilla ramma upptökunnar með myndvinnsluforriti á borð við Handbrake eða Camtasia.

HVAÐAN KEMUR HUGMYNDIN AÐ HLJÓÐLAUSUM MYNDBÖNDUM OG TALSETNINGARVERKEFNUM?

Hugmyndin að þessum verkefnum kviknaði í norræn-baltnesku samstarfsverkefni sem kallast Nordic-Baltic GeoGebra Network og var stofnað af nokkrum fræðimönnum á sviði stærðfræðimenntunar til að efla samstarf starfandi kennara og fræðafólks sem hafði áhuga á að nýta tækni í skólastarfi við kennslu stærðfræði. Á meðal þeirra sem undirbjuggu og skipulögðu þetta samstarfsverkefni var Freyja Hreinsdóttir, prófessor við Menntavísindasvið Háskóla Íslands en hún skipulagði fyrstu ráðstefnu samstarfsverkefnisins í Reykjavík árið 2010 og bar hitann og þungann af því að þróa verkefnið árin 2010-2019 á Norðurlöndunum og í Eystrasaltsríkjum.

Á ráðstefnum sem haldnar voru árlega komu saman stærðfræðikennarar úr grunn- og framhaldsskólum annars vegar og hins vegar starfsfólk háskóla sem sinnir kennslu kennaranema og rannsóknum á sviði stærðfræðimenntunar. Kynningar fóru fram ýmist á veggspjöldum, í vinnusmiðjum, fyrirlestrum eða málstofum og dagskráin var iðulega afar fjölbreytt með áherslu á að kennarar geti deilt hver með öðrum því sem þau hafa nýlega prófað í sinni kennslu og rætt saman um mögulega framtíðar-útfærslu. Einnig var frumkvöðlum boðið að mæta á ráðstefnurnar og kynna nýja tækni fyrir kennslu stærðfræði og skyldra greina. Þú, lesandi góður, skalt endilega hafa augun opin fyrir ráðstefnum af þessu tagi, ef þig langar að kynnast fleiri kennurum sem nota hugbúnað á borð við GeoGebra í kennslu sinni.

Ég, höfundur þessarar greinar, var stödd erlendis við nám þegar fyrsta ráðstefnan fór fram en var mjög áhugasöm um notkun GeoGebru við kennslu stærðfræði og gerði ýmsar tilraunir með notkun forritsins í kennslu við Verzlunarskóla Íslands

2009-2010 og Menntaskólann við Hamrahlíð 2011-2016 og 2019-2020. Haustið 2012 mætti ég á fyrstu ráðstefnuna og eftir það tók ég þátt í hvert skipti, ýmist með veggspjöld, vinnusmiðju, fyrirlestur eða aðra kynningu. Frá hausti 2013 tók ég líka þátt í vinnu svokallaðs kjarnavinnuhóps (e. key topic group), en það eru hópar opnir öllum sem áhuga hafa og fjallar hver þeirra um eitthvert nýtt viðfangsefni sem tengist notkun tækni við kennslu stærðfræði.

Fyrsti hópurinn fjallaði um það hvernig nýta mætti skjáupptökutækni (e. screen recording technology) í stærðfræðikennslu. Um 20 manns mættu á fyrsta fundinn og í kjölfar hugarflugs-umræðna (e. brainstorming) var ákveðið að skipta þeim hópi niður í fjóra smærri hópa. Einn þessara hópa ræddi sérstaklega um fjölbreyttan menningarbakgrunn nemenda og hvernig mætti koma til móts við þann fjölbreytileika. Upphaflega datt hópnum í hug að útbúa eins konar kennslumyndbönd án hljóðs sem kennarar eða túlkar myndu síðan talsetja á mismunandi tungumálum. Fljótlega sveigði hugmyndin þó inn á þá braut að það yrði hlutverk nemenda að semja og taka upp talsetningu við hljóðlausu myndböndin.

Þegar hugmynd þeirra var fyrst kynnt fyrir okkur hinum þá leist mér satt best að segja lítið á. Hljóðlaus myndbönd? Nemendur að taka upp talsetningar? Til hvers? En samt ákvað ég að gefa þessu tækifæri og ég sé svo sannarlega ekki eftir því. Við vorum margir kennarar í fimm löndum sem prófuðum verkefnin með nemendum okkar sem voru á fimmta til tólfta ári sinnar skólagöngu (í 5.-10. bekk og á fyrsta eða öðru ári í framhaldsskóla).

Veturinn þegar ég tók þátt þá kenndi ég meðal annars hornafræði og hnitarúmfræði og þegar kom að því að kanna hvernig reikna mætti flatarmál þríhyrnings þá sýndi ég nemendum hljóðlaust myndband, skipti þeim í tveggja manna hópa og setti þeim fyrir að taka upp talsetningu við myndbandið. Myndbandið sýndi þríhyrning og hvernig það að hornpunktar hans voru dregnir til í hnitakerfinu hafði áhrif ýmist á lengd grunnlínu eða lengd hæðar (og þá áhrif á flatarmál þríhyrningsins) eða einungis áhrif á útlit þríhyrningsins (þegar lengd grunnlínu og hæðar breyttist ekki, en staðsetning hæðarinnar breyttist).

Talsetningar nemenda komu mér mjög á óvart. Mörg virtust ringluð. Tveir nemendur (köllum þá par A) sem hingað til höfðu staðið sig miðlungi vel í verkefnum og könnunarprófum á önninni útskýrðu í sinni talsetningu tengsl hæðar, grunnlínu og flatarmáls þríhyrnings eins og þaulvanir kennarar. Tveir aðrir nemendur (köllum þá par B) sem höfðu staðið sig mjög vel á önninni ræddu um línur og hallatölur þeirra og nefndu aldrei þríhyrning, lengdir eða flatarmál. Hvers vegna? Ég ræddi við nemendurna hvern fyrir sig og komst að því að þau höfðu fram til þessa nánast aldrei talað saman um stærðfræði á þann hátt sem talsetningarverkefnið krafðist af þeim. Par B lýsti hversu stressuð þau hefðu verið af því þau vissu ekki til hvers var ætlast og gátu ekki flett upp „réttu svari“ þegar þau voru búin að leysa verkefnið. Par A lýsti því yfir að þeim leiddist eiginlega dálítið í tímum og þætti frekar leiðinlegt að vinna endalaus knippi af svipuðum dæmum „bara með mismunandi tölum“. Þegar ég skoðaði verkefnin sem kennsluheftin buðu upp á sá ég reikni-leikni-æfingar meira og minna. Lítið reyndi þar á skilning eða innsæi og það var fátt sem gaf tilefni til samræðna um námsefnið. Enda var það mín reynsla að nemendur ræddu lítið saman um það sem var á dagskránni hverju sinni. Áherslan var á að geta reiknað dæmi af vissum tegundum en lítið hugað að því að skoða samhengi hlutanna, merkingu þeirra og tengsl. Hljóðlausa myndbandsverkefnið vakti bæði mig sjálfa og nemendur til vitundar um mikilvægi þess að ræða saman um námsefnið.

Nú er það svo að reiknileikni er hægt að þjálfa upp að vissu marki en leiknin við að leysa dæmi er þó heldur takmörkuð til lengri tíma litið ef aldrei er litið um öxl og skoðað hvað býr að baki. Ég hafði vissulega reynt að krydda kennsluna fram að þessu með ýmiss konar nýstárlegum verkefnum sem á vegi mínum urðu en þarna varð einhvers konar vendipunktur. Ég áttaði mig á að það hvernig ég hafði unnið með námsefnið fram til þessa var alls ekki í takt við kennslu til skilnings. Mig langaði að breyta kennsluháttum en átti erfitt með að átta mig á hvernig ég ætti að bera mig að.

Ég leitaði til Ingólfs Gíslasonar, aðjúnkts við Menntavísindasvið Háskóla Íslands, til að fá hugmyndir að bókum sem ég gæti lesið til að afla mér meiri þekkingar á sviði kennslufræði stærðfræði. Samhliða þessu tók ég áfram þátt í starfi Nordic-Baltic GeoGebra Network og kynntist við það fleiri kennurum sem höfðu svipuð áhugamál um að breyta kennsluháttum þannig að áherslan yrði á stærðfræði og samræður en ekki rútínudæmi og stagl. Þegar tækifæri gafst til að hefja doktorsnám á sviði stærðfræðimenntunar þá sá ég strax möguleika á að kanna nánar hvernig nýta mætti hljóðlaus myndbönd og talsetningar þeirra í stærðfræðikennslu. Úr því varð fimm ára verkefni þar sem ég vann með sjö kennurum á framhaldsskólastigi að því að þróa verkefnin áfram.

Slíku þróunarverkefni lýkur seint en það var ákveðin varða á leiðinni að verja doktorsritgerð um það haustið 2021. Í verkefninu skoðaði ég meðal annars væntingar og reynslu kennara til/af að nota hljóðlaus myndbönd í kennslu, setti fram hönnunarstaðal fyrir hljóðlaus myndbandsverkefni og kannaði helstu áskoranir og ávinning af notkun verkefnanna fyrir kennara.

HELSTU ÁSKORANIR OG ÁVINNINGUR AF NOTKUN HLJÓÐLAUSRA MYNDBANDSVERKEFNA

Það kom í ljós að því getur fylgt mikil áskorun fyrir kennara að leiða hópumræður byggðar á talsetningum nemenda. Hins vegar kom líka í ljós að þegar kennari prófaði þrjú ólík hljóðlaus myndbandsverkefni sem dreifðust á þrjú skipti yfir eina önn þá jókst öryggi kennarans við að leiða hópumræðurnar. Einnig var greinilegt að talsetningar nemenda vörpuðu ljósi á áður óþekktar hindranir sem nemendur stóðu frammi fyrir varðandi það að átta sig á námsefninu, öðlast skilning á því og glímu þeirra almennt við stærðfræðiverkefni. Slíkar upplýsingar eru mjög mikilvægar fyrir kennara því að með því að vita af þessum hindrunum þá er hægt að bregðast við þeim og styðja nemendur við að komast yfir þær.

Gegnum tíðina hafa viss viðmið skapast í skólastofunni sem geta verið áskorun fyrir kennara. Meðal annars telja nemendur oftast að í stærðfræði sé „eitt rétt svar“ við hverju verkefni. Nemendur hafa nefnilega oft grátlega litla reynslu af opnum verkefnum með mörgum mögulegum lausnaleiðum og/eða mörgum mismunandi niðurstöðum. Þegar áskoranir á borð við þessa koma upp þá getur verið freistandi fyrir kennara að stíga skref til baka og hefja útlistunarkennslu í stað þess að byggja upp samræður á grunni talsetninga nemenda og tengja það sem nemendur segja við það hvernig sama hlut er lýst á formlegri hátt.

Í ljós kom að nemendur sem áður höfðu tekið lítinn sem engan þátt í umræðum eða hópverkefnum tóku virkan þátt í hljóðlausu myndbandsverkefnunum. Skýring á því gæti verið að nemendur fengu þarna tækifæri til að tala saman og taka upp hugmyndir sínar í stað þess að skrá úrlausnir á verkefninu á blað.

Með því að hlusta á talsetningar samnemenda geta skapast ný viðmið í skólastofunni – viðmið um að;

- margar leiðir geti verið „réttar“ þegar kemur að því að tala um stærðfræði,
- það sé fólgið visst gildi í því að heyra hvernig aðrir nemendur lýsa sama hlutnum og
- það hvernig við lýsum hlutunum skiptir máli og hefur merkingu fyrir okkur sjálf og aðra.

Bjarnheiður Kristinsdóttir
aðjúnkt við Menntavísindasvið Háskóla Íslands

Ritaskrá

Bjarnheiður Kristinsdóttir (2021). *Silent video tasks – their definition, development, and implementation in upper secondary school mathematics classrooms.* Doktorsritgerð, Háskóli Íslands. https://opinvisindi.is/handle/20.500.11815/2680

Ingólfur Gíslason og Bjarnheiður Kristinsdóttir (2018). Hvatt til hugsunar í stærðfræði. *Flatarmál, 1. tölublað.* Sjá einnig https://skolathraedir.is/2019/11/15/hvatt-til-hugsunar-i-staerdfraedi/

Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in Mathematics Grades K-12: 14 Teaching Practices for Enhancing Learning.* Corwin.

Wiliam, D. (2011). *Embedded Formative Assessment.*

Solution Tree Press.

MENNTAFLÉTTAN - STÆRÐFRÆÐINÁM Í LEIKSKÓLA

Skólaárið 2020-2021 var tilraunakennt námskeiðið *Stærðfræðinám í leikskóla* á vegum Menntaflléttunnar. Námskeiðið byggir á efni frá Skolverket í Svíþjóð, Matematiklyftet og var það þróað og aðlagað þörfum leikskóla á Íslandi í samstarfi við leikskólakennara sem voru þátttakendur á námskeiðinu.

Meginmarkmið námskeiðsins er að byggja upp námssamfélag í leikskólum undir leiðsögn stærðfræðileiðtoga í þeim tilgangi að auka skilning starfsmanna leikskóla á hvað geta talist stærðfræðileg viðfangsefni. Þannig verða þeir hæfari í að skipuleggja, undirbúa og fylgja eftir vinnu barna með það fyrir augum að auka hæfni þeirra til að taka virkan þátt í stærðfræðilegum viðfangsefnum í gegnum leik og útskýringar.

Leikskólarnir sendu einn til tvo starfsmenn á námskeiðið sem verða leiðtogar í sínum leikskóla og fengum við 5 leikskólakennara frá 3 leikskólum til samstarfs við okkur við þróun námskeiðsins. Leiðtogarnir leiða vinnuna innan leikskólanna og stýra umræðum um efni námskeiðsins.

Námskeið á vegum Menntaflléttunnar hafa þá sérstöðu að þau fara að hluta til fram innan háskólanna og að hluta til á vettvangi þátttakenda. Leiðtogar koma í sex lotur yfir skólaárið og hitta kennara námskeiðsins. Þeir vinna síðan með samstarfsfólki sínu að því að þróa vinnubrögð með börnum þar sem sjónum er beint að stærðfræði í leik og starfi.

Námskeiðið, *Stærðfræðinám í leikskóla*, er byggt er á rannsóknum Alan J. Bishop um sameiginlegan grunn í stærðfræði í ólíkum menningarheimum. Hann komst að þeirri niðurstöðu að eftirtalin viðfangsefni einkenndu stærðfræðina í öllum þeim menningarheimum sem hann skoðaði en þau eru:

- **Leika** - Móta og taka þátt í leikjum og spilum með meira eða minna formgerðum reglum sem allir þátttakendur verða að fylgja.
- **Útskýra** - Finna leið til að lýsa og útskýra tilvist fyrirbæra, hvort sem þau eru trúarleg, hversdagsleg eða vísindaleg.
- **Hanna** - Búa til form eða mynstur fyrir hlut eða hluta nánasta umhverfis. Það getur falið í sér að búa sér til mynd af hlutnum í huganum eða tákna hann á hefðbundinn hátt.
- **Staðsetja** - Rannsaka eigin rými og umhverfi og tákn- og hlutgera það með teikningum, líkönum og töflum.
- **Mæla** - Nota ólíka eiginleika til þess að ákvarða stærð og nota þá til að bera saman og raða með því að nota hluti eða tákn sem mælitæki og nota með þeim viðeigandi mælieiningar eða „mæliorð".
- **Telja** - Nota kerfisbundna aðferð til þess að bera saman og raða mismunandi hlutum. Þetta getur falið í sér að nota tákn, hluti eða strengi til þess að skrá eða sérstök talnaorð eða heiti.

Þessum þáttum er skipt niður á þrjú námskeið og tveir af grunnþáttunum teknir fyrir á hverju þeirra ásamt inngangi að efninu og umfjöllun um skráningu. Hverju námskeiði er skipt í fjóra þróunarhringi sem allir eru unnir með sambærilegum hætti og fara fram í leikskólunum. Á þessu fyrsta námskeiði nefnast þessir fjórir þróunarhringir: *Stærðfræðileg viðfangsefni, leikur, útskýringar og skráningar.*

Leiðtogarnir hittast ásamt kennurum á MVS áður en vinna við hvern þróunarhring hefst í leikskólunum. Þá er farið yfir efni þróunarhringsins og það rætt og ígrundað. Síðan fer þróunarhringurinn fram í leikskólanum þar sem leiðtogarnir vinna með samstarfsfólki sínu að því að greina stærðfræðina í athöfnum barnanna, ræða við þau og skrá námssögur. Þegar vinnu við þróunarhringinn er lokið þá hittast leiðtogarnir aftur með kennurum MVS, segja frá hvernig gekk og undirbúa næsta þróunarhring.

Hver þróunarhringur fer fram í leikskólunum og er skipt niður í fjögur skref þ.e. A, B, C og D.

- Í **skrefi A** fer hver starfsmaður einstaklingslega yfir það lesefni og aukaefni sem tilheyrir þeim þróunarhring sem unnið er að.
- Í **skrefi B** hittist allur hópurinn saman á fundi með leiðtogum. Þá er efni þróunarhringsins rætt og unnið úr lesefninu ásamt því að skipuleggja vinnu og skráningar með börnunum.
- Í **skrefi C** vinna starfsmenn að því að framkvæma og fylgjast með tilraunum barnanna. Ásamt því að þeir eru hvattir til þess að fylgjast með hjá öðrum samstarfsmönnum.
- Í **skrefi D** hittist allur hópurinn aftur. Þá fara fram umræður og ígrundun um hvernig til tókst og hvaða lærdóm má draga af þessum þróunarhring.

Í upphafi námskeiðsins var haldinn fundur með leiðtogunum þar sem þeir fengu kynningu á hvað felst í því að vera leiðtogi ásamt því hvernig hver þróunarhringur er byggður upp en eins og áður segir þá byggir hann alltaf á á fjórum skrefum frá A-D.

Í fyrsta þróunarhringnum kynntust þátttakendur grunnþáttunum sex um stærðfræðiskilning en, eins og áður segir, þá byggja þeir á kenningu Alan J. Bishop. Fjallað var um þróun stærðfræðiskilnings ungra barna og þau stærðfræðilegu viðfangsefni sem börn á leikskólaaldri fást við. Markmið þessa hluta námskeiðsins var að leikskólakennarar öðlist sameiginlegt tungumál til að tala um stærðfræðilega hæfileika barna og hvernig leikskólakennarar geta unnið með börnum að því að þroska þessa hæfileika. Þannig er hægt að átta sig á hvaða stærðfræðilegu viðfangsefni eru til staðar í leikskólunum.

Í öðrum þróunarhringnum fengu þátttakendur tækifæri til að íhuga, ræða og rannsaka fyrsta stærðfræðilega viðfangsefni Bishop, sem er leikurinn. Áhersla var á hlutverk leiksins í stærðfræðinámi barna. Sjónum er beint að hlutverki leikskólakennarans í leiknum og hvernig hann getur styrkt leikinn. Markmiðið var að leikskólakennarar dýpki skilning sinn á því hvers vegna hægt er að líta á suma hluta leiksins sem stærðfræðilegt viðfangsefni.

Í þriðja þróunarhringnum voru útskýringar barnanna í forgrunni og þau rök sem börn beita í útskýringum sínum. Stuðningur leikskólakennara við að styðja börn í að þroska og þróa útskýringar sínar rannsakaður og rætt um hvernig við skiljum heiminn í kringum okkur og gefum reynslu okkar merkingu.

Fjórði og síðasti þróunarhringurinn var um mikilvægi skráningar. Fjallað var um hvernig hægt er að nota skráningu barna í leikskólanum til þess að styðja þau við að dýpka stærðfræðilegan skilning sinn. Skráning barna getur verið hlutbundin, en hún felst líka í talmáli og hugsunum sem börn tjá við lausnir ákveðinna verkefna. Þessa skráningu er síðan hægt að nota sem grunn að frekari verkefnum, til dæmis til þess að fá börnin til að ímynda sér hvað gæti gerst ef svipaðar aðstæður koma aftur upp seinna.

Gögnum var safnað á meðan á námskeiðinu stóð og voru þau notuð til að þróa það jafnóðum. Við lok námskeiðs tóku leiðtogar þátt í spurningakönnun. Í svörum þeirra kom fram að þátttaka í leikskólunum einskorðaðist ekki við leikskólakennara heldur náði hún til margra áhugasamra. Leiðtogarnir kynntu verkefnið fyrir samstarfsfólki en misjafnt var hversu margir tóku þátt. Hins vegar voru margir sem sýndu áhuga og telja leiðtogarnir að námskeiðið hafi haft jákvæð áhrif á námssamfélagið í leikskólunum þar sem það opnaði augu samstarfsfólks fyrir stærðfræði í umhverfinu og samþættingu inn í annað starf ásamt aukinni umræðu bæði um skráningar og stærðfræði í námi leikskólabarna.

Segja má að námskeiðið hafi verið sérstök hvatning til skráninga og voru þær gerðar sýnilegar í leikskólunum en þáttur skráningar fléttast inn í öll þrjú námskeiðin sem tilheyra námskeiðum undir *stærðfræðinámi í leikskóla.* Með því að setja skráningarnar upp í opnum rýmum vonuðust leiðtogarnir til að þær væru hvatning fyrir aðra starfsmenn að nýta sér verkefnin en skráningarnar fengu verðskuldaða athygli.

SKRÁNING

Skráningin *Til hvers notar maður reglustiku?* endurspeglar vel tilgang vinnu við þróunarhring 3 en í honum er hlutverk leikskólakennara að styðja börnin í að þroska og þróa útskýringar sínar ásamt því að rannsaka og ræða um hvernig við skiljum heiminn í kringum okkur og gefum reynslu okkar merkingu. Þar sem útskýringar barnanna eru í forgrunni og þau rök sem þau beita í útskýringum sínum.

Þátttakan á námskeiðinu hafði áhrif á viðhorf leiðtoganna til stærðfræðináms barna í leikskóla og endurspeglaðist það í breyttum vinnubrögðum. Börnin eru hvött til að útskýra meira og gefinn meiri tími til þess. Spurningar eru meira ígrundaðar ásamt því að leiðtogarnir eru meðvitaðri um að fanga augnablikið og setja upp stærðfræðigleraugun. Meira er talað um hugtök stærðfræðinnar við samstarfsfólk og vettvangsferðir hafa fengið meiri stærðfræðilega áherslu.

TIL HVERS NOTAR MAÐUR REGLUSTIKU?

B = barn
K = kennari

B: Mælir hvar maður vill teikna línur.

K: Getið þið teiknað reglustiku fyrir mig?

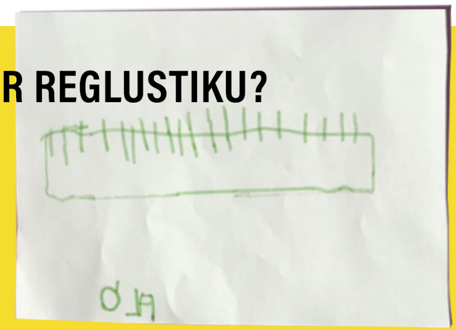
B: Ég get teiknað hana svona utanum

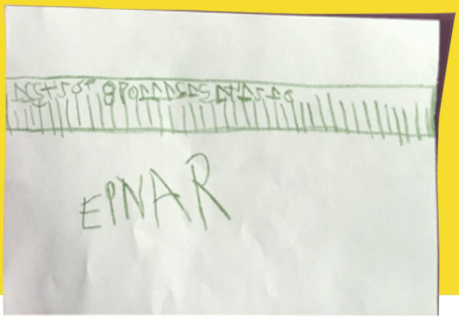
K: Það eru til mismunandi stórar reglustikur, af hverju er það?

B: Kannski þarf maður stóra ef maður er með risastórt blað.

K: HVERS VEGNA ER REGLUSTIKA MEÐ ALLAR ÞESSAR LÍNUR?

B: KANNSKI TIL AÐ TÖLUSTAFIRNIR KLESSIST EKKI SAMAN.





Það er ekki síður áhugavert að skoða hvaða áhrif leiðtogarnir telja að þátttaka þeirra í námskeiðinu hafi haft á börnin. Þau fengu meiri hvatningu til stærðfræðilegra vangaveltna þar sem leiðtogarnir voru meira vakandi fyrir umræðum þeirra tengdum stærðfræði ásamt því að betur var hugað að efnivið og verkefnum. Þetta endurspeglast sem dæmi í miklum áhuga hjá börnum á elstu deild í einum leikskóla í vinnu með kubba og mælingar.

Leiðtogarnir sögðust vera tilbúnir að sækja annað leiðtoganámskeið í stærðfræðimenntun með sama sniði en annað inntak. Einnig að vera áfram leiðtogar í námssamfélagi um stærðfræðimenntun í leikskólanum sínum. Námskeiðið hafi verið skemmtilegt, fræðandi og hvetjandi. Stærðfræðin kemur alls staðar fyrir í dagskipulaginu og því gott að fá hvatningu til að horfa með stærðfræðigleraugum á starfið með börnunum.

Út frá niðurstöðum má draga þær ályktanir að það að virkja leiðtoga innan leikskólanna sé góð leið til að leiða námssamfélög innan þeirra og vinna með þróunarhringina sé vel til þess fallin að auka áherslu á stærðfræði í vinnu með börnum.

Námskeiðið hefur aukið skilning starfsmanna á hvað geta talist stærðfræðileg viðfangsefni barna á leikskólaaldri í leik og starfi og skráningar sýndu sig sem góð leið til að draga fram þann lærdóm sem á sér stað.

Rannsóknin var gagnleg í að aðlaga námskeiðið að leikskólanum og þeim aðstæðum sem þar eru en einnig skiptir miklu máli velvilji stjórnenda og stuðningur annarra starfsmanna til þess að námssamfélag geti vaxið og dafnað. Ljóst er að sóknarfærin varðandi stærðfræði í leikskólum eru mikil og starfsmenn áhugasamir.

Núna í haust var námskeiðið opnað undir heitinu *Stærðfræðin í leik barna* og sækja það leiðtogar frá um 20 leikskólum. Einnig er hafið nýtt tilraunanámskeið með leiðtogum á þróunarhringjum 5 – 8 sem væntanlega verður opnað næsta haust.

Kennarar á námskeiðunum eru Jónína Vala Kristinsdóttir, dósent í stærðfræðimenntun við MVS HÍ, Margrét S. Björnsdóttir, aðjúnkt við MVS HÍ og Valdís Ingimarsdóttir, deildarstjóri í leikskólanum Furuskógi. Birna Hugrún Bjarnardóttir hefur að miklu leyti séð um skipulagningu námskeiðsins í hlutverki verkefnastjóra stærðfræðihluta Menntafléttunnar. Menntafléttan er samstarfsverkefni Menntavísindasviðs Háskóla Íslands, Háskólans á Akureyri og Kennarasambands Íslands og er hún styrkt af mennta- og menningarmálaráðuneytinu.

Áður hefur verið fjallað um námskeið sem byggja á Matematiklyftet í Flatarmálum og var það gert í 1. tbl.27. árgangs. Þar má lesa nánar um forsögu námskeiðanna og samstarfið um þau.

Margrét S. Björnsdóttir
aðjúnkt við Menntavísindasvið Háskóla Íslands

TALAÐ UM TÖLUR

ER LEIÐ Í KENNSLU TIL AÐ EFLA SAMRÆÐUR OG TJÁNINGU NEMENDA

Sandra Dögg Björnsdóttir
kennaranemi

TVEIR FULLKOMNIR SNILLINGAR

Talnafræði nefnist sú grein stærðfræðinnar sem fjallar um heilu tölurnar. Það er eitthvað óviðjafnanlega heillandi við þá grein. Í talnafræði heyrum við það sem rímar, finnum það sem passar, sjáum það sem stemmir, skynjum það sem stenst. En í talnafræði rekumst við líka á múra og lendum í þrautum sem virðast auðskildar en reynast snúnar.

Í talnafræði er fengist við það hvernig sumar tölur eru margfeldi af öðrum. Eða, ekki síður, er reynt að greina hvaða tölur eru þættir í öðrum. Til dæmis hefur talan 40 nokkra þætti og til að finna þessa þætti gætum við einfaldlega skrifað á blað allar tölur frá 1 til 40 og athugað samviskusamlega hverjar þeirra eru þættir í 40. Þetta verkefni, að finna þætti tölunnar 40, má líka leysa á markvissari hátt með því að leysa 40 upp í þætti sína og skrifa $40 = 2^3{\cdot}5$. Þetta köllum við að *frumþátta* töluna 40, þarna er talan 40 skrifuð sem margfeldi eintómra frumtalna, það er að segja talna sem eru stærri en 1 og eru þess eðlis að hafa ekki aðra þætti en töluna 1 og töluna sjálfa. Undirstöðusetning talnafræðinnar segir að sérhverja jákvæða heila tölu nema 1 megi frumþátta á nákvæmlega einn máta. Framsetningin $40 = 2^3{\cdot}5$ gerir okkur kleift að tilgreina kerfisbundið alla möguleika á að mynda þætti tölunnar 40, þeir eru 1, 2, 2^2 og 2^3 og síðan líka 5, $2{\cdot}5$, $2^2{\cdot}5$ og $2^3{\cdot}5$. Þetta eru tölurnar 1, 2, 4, 8, 5, 10, 20 og 40. Þarna eru allir þættir tölunnar 40 komnir (átta talsins). Tölurnar sem ganga upp í 40 eru hér kallaðir þættir í 40, en sömuleiðis er algengt að tala um *deila* tölu.

Meðal þekktustu viðfangsefna talnafræðinnar er leitin að tölum sem eru sérstakar að því leyti, að ef deilar tölunnar eru lagðir saman, að tölunni sjálfri undanskilinni, þá verður útkoman talan sjálf. Slíkar tölur eru sagðar *fullkomnar*. Minnsta dæmið um fullkomna tölu er talan 6, ef lagðir eru saman deilar hennar, að 6 sjálfri undanskilinni, fæst 1 + 2 + 3 og það er einmitt talan 6.

Það getur verið hentugt að hafa táknmál fyrir summu deila gefinnar tölu. Við skrifum stundum $\sigma(n)$ (lesið sigma af n) sem tákn fyrir summu allra deila tölunnar n. Þannig er til dæmis

$$\sigma(2) = 1 + 2 = 3$$

$$\sigma(3) = 1 + 3 = 4$$

$$\sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7$$

$$\sigma(5) = 1 + 5 = 6$$

$$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$$

$$\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$$

Við tökum eftir því að sé p frumtala, þá er $\sigma(p)=p+1$. Annar eftirtektarverður eiginleiki er að þegar a og b eru ósamþátta tölur, þá gildir $\sigma(a{\cdot}b) = \sigma(a){\cdot}\sigma(b)$ og þetta er ekki erfitt að sanna. Við sjáum til dæmis að $\sigma(10)$ má reikna sem $\sigma(2){\cdot}\sigma(5)$. Almennt er það svo, að út frá frumþáttun tölu n má finna $\sigma(n)$.

Fullkominni tölu getum við nú lýst þannig að það sé tala n sem uppfyllir skilyrðið $\sigma(n) = 2n$.

Grikkir til forna höfðu áhuga á fullkomnum tölum og víkur nú sögunni til snillingsins Evklíðs. Fyrir um 23 öldum setti hann fram eftirfarandi reglu

Ef p er frumtala og $2^p - 1$ er frumtala, þá er
$2^{p-1}(2^p - 1)$ fullkomin tala

Þrjú minnstu dæmin um tölur af þeirri gerð sem Evklíð tilgreinir eru:

Ef $p = 2$
þá er $2^p - 1 = 3$ sem er frumtala og $2^{p-1}(2^p - 1) = 6$.

Ef $p = 3$
þá er $2^p - 1 = 7$ sem er frumtala og $2^{p-1}(2^p - 1) = 28$.

Ef $p = 5$
þá er $2^p - 1 = 31$ sem er frumtala og $2^{p-1}(2^p - 1) = 496$.

Við höfum þegar séð að 6 er fullkomin tala og getum sannreynt að sama gildir um tölurnar 28 og 496, leggjum saman deila og fáum 1 + 2 + 7 + 14 = 28 og eins 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496.

Við nánari eftirgrennslan kæmi líka á daginn að 6, 28 og 496 eru þrjár minnstu fullkomnu tölurnar.

Evklíð

Reglu Evklíðs er ekki flókið að rökstyðja. Gerum ráð fyrir að $2^p - 1$ sé frumtala og athugum deila tölunnar $2^{p-1}(2^p - 1)$. Við getum tekið þá fyrir í tvennu lagi, í fyrsta lagi deilana $1, 2, \ldots, 2^{p-1}$ og í öðru lagi þær sömu tölur margfaldaðar með $2^p - 1$. Til að reikna summu þessara deila má einfaldlega grípa til þekktrar summureglu $1 + 2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ og þá fæst

$$1 + 2 + \ldots + 2^{p-1} = 2^p - 1 \quad \text{(summa fyrri hluta deilanna)}$$

$$(2^p - 1) \cdot (1 + 2 + \ldots + 2^{p-1}) = (2^p - 1) \cdot (2^p - 1) \quad \text{(summa síðari hluta deilanna)}$$

$$2^p - 1 + (2^p - 1) \cdot (2^p - 1) \quad \text{(summa allra deilanna)}$$

$$= 2^p(2^p - 1)$$

Þessi útkoma er tvöföld upprunalega talan, sem sannar að þar er um fullkomna tölu að ræða.

Þrátt fyrir snilli Evklíðs er ýmsum spurningum ósvarað. Til dæmis hljóta að vakna spurningar um tölur af gerð $2^n - 1$. Þarf n að vera frumtala til að $2^n - 1$ geti verið frumtala? Jú, þeirri spurningu er auðvelt að svara, því dálítil algebruþáttun myndi duga til að sannfæra okkur um að þegar n er ekki frumtala þá verður $2^n - 1$ ekki frumtala. Til dæmis má sjá að $2^{15} - 1$ er deilanleg með $2^3 - 1$ og $2^5 - 1$. Enn hljótum við að spyrja: Er $2^p - 1$ ávallt frumtala þegar p er frumtala? Svarið við þessu er nei. Vissulega eru tölurnar $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$ og $2^7 - 1 = 127$ frumtölur, en $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ og er ekki frumtala. En ætli frumtölur af gerðinni $2^p - 1$ séu engu að síður óendanlega margar? Ef svarið við þeirri spurningu er jákvætt, þá þýðir það að til séu óendanlega margar fullkomnar tölur samkvæmt forskrift Evklíðs. Hér versnar í því vegna þess að enginn veit hvort til eru óendanlega margar frumtölur af gerðinni $2^p - 1$. Þannig tölur eru nefndar Mersenne-frumtölur, en þrátt fyrir miklar rannsóknir er óútkljáð hvort til séu óendanlega margar slíkar. Það er þá hreinlega ekki vitað, hvort fullkomnar tölur samkvæmt forskrift Evklíðs eru endanlega eða óendanlega margar.

Sagan heldur áfram og stærðfræðin líka. Í samræmi við forskrift Evklíðs fundust forðum fullkomnu tölurnar 6, 28, 496 og 8128. Í seinni tíð hafa fundist töluvert fleiri Mersenne-frumtölur og um leið fleiri fullkomnar tölur. En regla Evklíðs segir ekkert um möguleikana á að finna fullkomnar tölur sem ekki falla undir forskriftina. Víkur þá sögunni að öðrum snillingi, Euler, sem var uppi á 18. öld. Alveg óhætt er að segja að Evklíð og Euler hafi báðir unnið fjölda stórafreka á sviði stærðfræðinnar. Eftirfarandi gullkorn eigum við Euler að þakka

Ef n er slétt fullkomin tala þá er n af gerðinni
$2^{p-1}(2^p - 1)$

Ljóst er að tölurnar í reglu Evklíðs eru sléttar en Euler sannar til viðbótar, að meðal sléttu talnanna séu engar aðrar tölur fullkomnar.

Reglu Eulers má rökstyðja með eftirfarandi hætti. Hugsum okkur að n sé fullkomin slétt tala. Skrifa má $n = 2^k \cdot m$, þar sem m er oddatala. Hér er $k \geq 1$ því n er slétt, eins er $m \geq 1$ enda ljóst að 2^k er ekki fullkomin tala.

Við viljum að skilyrðið $\sigma(n) = 2n$ sé uppfyllt, að summa allra deila n sé $2n$.

Nú er $\sigma(n) = \sigma(2^k \cdot m) = \sigma(2^k)\cdot\sigma(m)$ og við vitum að $\sigma(2^k) = 2^{k+1} - 1$. Skilyrðið gefur því jöfnuna

$$(2^{k+1} - 1)\cdot\sigma(m) = 2^{k+1}\cdot m$$

Hér sést að oddatalan $2^{k+1} - 1$ gengur upp í $2^{k+1}\cdot m$, en hún hefur engan þátt sameiginlegan með 2^{k+1} svo $2^{k+1} - 1$ verður að ganga upp í m. Skrifum þá $m = (2^{k+1} - 1)c$. Athugum svo nánar hver heila talan c getur verið. Setjum $m = (2^{k+1} - 1)c$ inn í jöfnuna

$$(2^{k+1} - 1)\cdot\sigma(m) = 2^{k+1}\cdot(2^{k+1} - 1)c$$

og styttum út sameiginlega þáttinn $(2^{k+1} - 1)$ þá fæst

$$\sigma(m) = 2^{k+1}\cdot c$$

Af $\sigma(m) = 2^{k+1}\cdot c$ og $m = (2^{k+1} - 1)c$ fæst

$$\sigma(m) = m + c$$

Tölurnar c og m eru mismunandi (enda $m > c$) og báðar eru deilar í m, en $\sigma(m)$ er summa allra deila m. Þetta þýðir að ekkert annað kemur til greina, en að m hafi einungis þessa tvo deila, c og m, en það þýðir að m er frumtala og að $c = 1$.

Þá liggur fyrir að $m = 2^{k+1} - 1$ og er frumtala, sem þýðir að $k+1$ er einhver frumtala p og loks er ljóst að $n = 2^{p-1}\cdot(2^p - 1)$ og reglan er sönnuð.

Við vitum nú töluvert um sléttar fullkomnar tölur, þökk sé Evklíð og Euler. Að vísu er enn óútkljáð hvort þær eru óendanlega margar, því ósannað er að til séu óendanlega margar frumtölur af gerðinni $2^p - 1$.

En hvað með fullkomnar oddatölur? Það má ýmislegt gera til að leita að fullkomnum oddatölum, í fljótu bragði þarf þetta verkefni ekki að virðast flóknara en gengur og gerist. Staðreyndin er samt sú að þær hafa ekki fundist. Enginn veit hvort til er svo mikið sem ein fullkomin oddatala. Vilji einhver taka sér fyrir hendur að leita, má til gamans geta þess að margar lægstu oddatölurnar eru þannig að summa deila er lægri en tvöföld talan. Summa deila tölunnar 45 er til dæmis 1 + 3 + 9 + 5 + 15 + 45 = 78 sem er minna en 90. Það er forvitnileg staðreynd að sama á við um allar oddaölur upp að 945, sem er lægsta oddatalan sem hefur summu deila umfram tvöfalda töluna sjálfa. En að hitta á oddatölu þannig að summa deila er nákvæmlega tvöföld talan sjálf hefur reynst þrautin þyngri. Sýnt hefur verið að fullkomin oddatala hlyti að vera nokkuð stór og hafa marga frumþætti. Leitinni er samt ekki lokið á meðan engin fullkomin oddatala finnst en ekki tekst heldur að sanna að hún sé ekki til.

Leonhard Euler (1707-1783)

Evklíð og Euler voru snillingar í leitinni að fullkomnum tölum. En samt leiðir viðfangsefnið okkur að þröskuldum sem enginn hefur enn komist yfir. Það virðist alltaf rúm fyrir fleiri snillinga.

(Greinarkorn þetta er að sumu leyti líkt kafla 15 í bókinni A Friendly Introduction to Number Theory eftir Joseph H. Silverman.)

Friðrik Aðalsteinn Diego
lektor við Menntavísindasvið Háskóla Íslands

NORMA 20 Bringing Nordic mathematics education into the future

Norðurlandabúar hafa þróað með sér margs konar samstarf á sviði stærðfræðimenntunar. Þriðja hvert ár stendur NoRME (the Nordic Society for Research in Mathematics Education), fyrir ráðstefnu um rannsóknir á sviði stærðfræðimenntunar. Þessar ráðstefnur ganga undir nafninu NORMA (Nordic Research on Mathematics Education). Í undirbúningsnefnd hverrar ráðstefnu eru tveir fulltrúar frá hverju landi og voru fulltrúar Íslands að þessu sinni Freyja Hreinsdóttir og Guðbjörg Pálsdóttir. Þegar fresta þurfti ráðstefnunni um ár tók Jóhann Örn Sigurjónsson sæti Freyju í nefndinni. Dagana 1. – 4. júní 2021 var síðan níunda ráðstefnan, NORMA 20, haldin rafrænt frá Osló með um 180 þátttakendum. Meðal þeirra voru 15 Íslendingar sem flestir dvöldu saman í húsnæði Háskóla Íslands við Laugarvatn til að skapa góðar aðstæður til samræðna og samveru.

Þema ráðstefnunnar var *Norræn stærðfræðimenntun; hvað þarf til og hvað þýðir það að þróa norræna stærðfræðimenntun til framtíðar.* Skipuleggjendur lögðu áherslu á að þemað væri skoðað út frá tveimur meginsviðum, þ.e. norrænu stærðfræðimenntunarlíkani og upplýsingatækni í stærðfræðimenntun.

Rannsakendur greindu frá rannsóknum um ýmis málefni stærðfræðikennslu á Norðurlöndunum, meðal annars um skólakerfi, kennaramenntun, stöðu nemenda, námsefni og námsmat. Mikil þróun er í gangi um hvernig flétta megi áherslur í stærðfræðimenntun eins og þrautalausnir og rökhugsun við upplýsingatækni og forritun þannig að nemendur geti þróað með sér hæfni með sköpun og skilning að leiðarljósi.

Aðalfyrirlesararnir voru fjórir og fjölluðu þeir um meginþemu ráðstefnunnar útfrá ólíkum sjónarhornum.

AÐALFYRIRLESTRAR

More than 20 years of international large-scale assessments: Lessons learned?

Rolf Olsen er prófessor á sviði matsfræða við Oslóarháskóla, Centre for Educational Measurement, Noregi

Heimasíða: https://www.uv.uio.no/cemo/english/people/aca/rolfvo/index.html

Mathematical and computational thinking

Paul Drijvers er prófessor á sviði stærðfræðimenntunar við Freudenthal stofnunina við háskólann í Utrecht, Holllandi.

Heimasíða: https://www.uu.nl/staff/phmdrijve

Dynamic Models in Mathematics Teaching and its Development

Barbara Jaworski er prófessor á sviði stærðfræðimenntunar við Loughborough háskóla, Bretlandi.

Heimasíða: https://www.lboro.ac.uk/departments/mec/staff/barbara-jaworski/

Young children's mathematical learning and how to support it

Minna Hannula-Sormunen er prófessor við kennaramenntunardeild háskólans í Turku, Finnlandi.

Heimasíða: https://www.utu.fi/en/people/minna-hannula-sormunen

FYRIRLESTUR MINNA HANNULA-SORMUNEN

Minna Hannula-Sormunen hóf erindi sitt á spurningunum:

> Hvers konar stuðning er að finna við stærðfræðinám ungra barna?
>
> Hvernig má styðja börn í að læra að greina stærðfræðina í kringum sig?

Minna vísaði í rannsóknir Wang (2016), Clements et al. (2011) og fleiri þar sem fram kemur að mikilvægt sé að börn fái á leikskólaaldri örvun til að þróa stærðfræðihugsun sína. Beita þurfi fjölbreyttum leiðum og fara inn á mörg svið stærðfræðinnar. Megináherslu lagði Minna á að segja frá rannsóknum um leiðir til að örva leikskólabörn í að þróa stærðfræðihæfni sína. Í upphafi var sjónum einkum beint að talnaskilningi en í seinni rannsóknum var líka unnið með mynstur. Í rannsóknunum var bæði skoðað hvernig börn fengust við viðfangsefnin og hvernig starfsfólk leikskólanna brást við og gæti hafa brugðist við.

Í rannsókn á athygli þriggja ára barna á fjölda var sjónum þeirra beint að fjöldanum 1–3 í gegnum skipulagða leiki, t.d. búðarleik og daglegar athafnir, t.d. við matarborðið. Í rannsókn á 3–5 ára börnum var unnið á svipaðan hátt en einnig unnið með talningu. Hvor rannsókn stóð yfir í 5 vikur og var áhersla lögð á að setja fram fjölda á einfaldan hátt, efla áhugann á fjölda og tölum, spyrja spurninga um fjölda, nota tölur á merkingarbæran hátt og hvetja til talningar. Börnin tóku töluverðum framförum á meðan á rannsókninni stóð miðað við samanburðarhóp en sex mánuðum eftir rannsóknina hafði munurinn á hópunum minnkað. Sett hafa verið á laggirnar námskeið á netinu fyrir starfsfólk í leikskólum, Pikkumatikka – MOOC. Þar sem unnið er út frá myndskeiðum á umræðum í leikskólastarfi. Reynslan af þeim hefur verið jákvæð og hún er nú nýtt til að þróa þessi námskeið áfram. Þau hafa bæði verið haldin á finnsku og sænsku. Í þessari stuttu mynd er gefin innsýn í nálgunina í námskeiðinu.

https://www.youtube.com/watch?v=X-8fXwYgqMw

Minna hefur ásamt samstarfsfélögum sínum skrifað fjölda greina um stærðfræðinám ungra barna og er hér bent á greinina *Promoting spontaneous focusing on numerosity and cardinality-related skills at day care with one, two, how many and count, how many programs* https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1818470

NÁNAR UM RÁÐSTEFNUNA

Fjöldi erinda voru haldin og flytjendur frá Íslandi voru nokkrir. Áhugavert verður að fylgjast áfram með rannsóknum þeirra og frekari kynningum og skrifum um þær.

Bjarnheiður (Bea) Kristinsdóttir, Freyja Hreinsdóttir og Zsolt Lavicza: *Important input from teachers during the further development of silent video tasks' instructional sequence*

Berglind Gísladóttir og Jóhann Örn Sigurjónsson: *Quality in Mathematics teaching in Icelandic compulsory schools*

Ingólfur Gíslason: *When students don't say what they are expected to say*

Jónína Vala Kristinsdóttir, Guðbjörg Pálsdóttir, Birna Hugrún Bjarnardóttir og Sólveig Zophoníasdóttir: *Professional development program in Iceland based on the Swedish program Matematiklyftet*

Ólöf B. Steinþórsdóttir, Jónína Vala Kristinsdóttir og Guðbjorg Pálsdóttir: *Children's engagement with word problems*

Þórgunnur Óttarsdóttir: *Observing and supporting teachers in developmental work - aiming for changes and diversity in mathematics teaching*

Á ráðstefnunni var haldinn aðalfundur heildarsamtakanna NoRMe. NoRMe eru regnhlífarsamtök landsfélaga um rannsóknir á sviði stærðfræðimenntunar á Norðurlöndunum og í baltnesku löndunum. Þátttökulönd eru nú Danmörk, Eistland, Finnland, Ísland, Noregur og Svíþjóð. Auk þess á fulltrúi norræna rannsóknatímaritsins NOMAD (Nordisk Matematik Didaktik) sæti í stjórn samtakanna. Meginviðfangsefni samtakanna er að halda NORMA-ráðstefnur þriðja hvert ár. Auk þess er virkur póstlisti og heimasíða (https://sites.google.com/view/norme/home) þar sem sendar eru út ýmsar fréttir um viðburði.

Undanfarin ár hefur Ólöf Björg Steinþórsdóttir setið í stjórn NoRMe fyrir hönd Íslands en á aðalfundinum tók Ingólfur Gíslason sæti í stjórninni. Guri Nortvedt frá Noregi var kjörinn formaður samtakanna.

Ákveðið var að næsta NORMA-ráðstefna verði haldin í Danmörku árið 2023.

Í tengslum við ráðstefnuna eru gefin út ráðstefnurit. Vegna frestunar ráðstefnunnar var ráðstefnurit gefið út í lok árs 2020 með greinum höfunda sem óskuðu eftir að fá birtingu greina sinna strax. Ritið má finna á heimasíðu sænsku stærðfræðikennarasamtakanna í riti þeirra SMDF, hefti 14 á slóðinni http://matematikdidaktik.org/wp-content/uploads/2021/04/NORMA_20_preceedings.pdf. Á næsta ári kemur út ráðstefnurit með fleiri greinum.

Erindin á ráðstefnunni fjölluðu um fjölbreytta þætti stærðfræðimenntunar. Áberandi var umfjöllun um rannsóknir á kennaramenntun, starfsþróun, forritun, stærðfræðinám yngri barna og reiknihugsun (e. computational thinking). Fram kom að mikil gróska er í rannsóknum og rannsakendum fjölgar hratt.

Guðbjörg Pálsdóttir
dósent við Menntavísindasvið Háskóla Íslands

Jóhann Örn Sigurjónsson
doktorsnemi við Menntavísindasvið Háskóla Íslands

Íslendingarnir á Laugarvatni í matarboði í sumarhúsi Jónínu Völu

EFNISYFIRLIT

Flötur
SAMTÖK STÆRÐFRÆÐIKENNARA